Formelark S2

✓ KONTROLLERT AV LÆRER

Følger og rekker

Aritmetisk følge	$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$
Aritmetisk rekke	$s_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$
Geometrisk følge	$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Geometrisk rekke	$s_n = a_1 \cdot \dfrac{k^n - 1}{k-1}$
Uendelig geometrisk rekke	$s = \dfrac{a_1}{1-k}$ når $-1 < k < 1$
Konvergensområde, kvotient $k(x)$	Alle x som gir $-1 < k(x) < 1$
Sum i konvergensområdet	$s(x) = \dfrac{a_1(x)}{1-k(x)}$
Rekursiv form	$a_{n+1} = a_n + d$ og $a_{n+1} = a_n \cdot k$
Konvergent rekke	$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$
Divergenstest	Går ikke a_n mot 0, divergerer rekka

Lån og sparing

Vekstfaktor	$v = 1 + \dfrac{p}{100}$
Nåverdi av B om n terminer	$N = \dfrac{B}{v^n}$
Annuitetslån, lånebeløp L og terminbeløp T	$L = T \cdot \dfrac{1 - \frac{1}{v^n}}{v-1}$
Restlån	Summen av nåverdiene til terminbeløpene som gjenstår
Serielån	avdrag $= \dfrac{L}{n}$
Serielån, terminbeløp	avdrag + rente av restlånet
Sparing, verdi rett etter innskudd nr. n	$S = T \cdot \dfrac{v^n - 1}{v-1}$

Logaritmer

Definisjon	$e^{\ln x} = x$ og $\ln e^x = x$
Produkt	$\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b$
Kvotient	$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
Potens	$\ln a^x = x \cdot \ln a$
Spesielle verdier	$\ln 1 = 0$ og $\ln e = 1$
Eksponentiallikning	$a^x = b \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

Derivasjon

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$k \cdot u$	$k \cdot u'$
$u \pm v$	$u' \pm v'$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$g(u(x))$	$g'(u) \cdot u'(x)$

Funksjonsdrøfting

Nullpunkt	$f(x) = 0$
Topp- eller bunnpunkt	$f'(x) = 0$, og f' skifter fortegn
Vendepunkt	$f''(x) = 0$, og f'' skifter fortegn
Andrederiverttesten	$f'(a) = 0$ og $f''(a) < 0$ gir toppunkt, $f''(a) > 0$ gir bunnpunkt
Tangent i $(a, f(a))$	$y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$
Vertikal asymptote for $\frac{P(x)}{Q(x)}$	$x = a$ når $Q(a) = 0$ og $P(a) \neq 0$
Horisontal asymptote	$y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$
Skrå asymptote	Kvotienten i polynomdivisjonen $P(x) : Q(x)$

Vekstmodeller

Eksponentiell vekst	$f(x) = a\cdot b^x = a \cdot e^{kx}$ der $k = \ln b$
Doblingstid	$T_2 = \dfrac{\ln 2}{k}$
Halveringstid	$T_{1/2} = \dfrac{\ln 0{,}5}{k}$
Logistisk vekst	$f(x) = \dfrac{N}{1 + a\cdot e^{-kx}}$
Bæreevne	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = N$
Vendepunkt, størst vekstfart	$x = \dfrac{\ln a}{k}$ og $f(x) = \dfrac{N}{2}$
Største vekstfart	$\dfrac{k\cdot N}{4}$

Integrasjon

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
k	$kx + C$
$x^r,\ r \neq -1$	$\dfrac{1}{r+1}\cdot x^{r+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^{kx}	$\dfrac{1}{k}\cdot e^{kx} + C$
a^x	$\dfrac{1}{\ln a}\cdot a^x + C$
$\ln x$	$x\cdot\ln x - x + C$

Analysens fundamentalsetning	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ der $F' = f$
Derivert av integral	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$
Integral som grenseverdi	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x,\quad \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$
Gjennomsnittsverdi av f på $[a,b]$	$\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Samlet endring	$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$
Areal mellom grafer, $f \geq g$	$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$
Delvis integrasjon	$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$
Variabelskifte, $u = g(x)$	$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$

Delbrøkoppspalting	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

Økonomi

Overskudd	$O(x) = I(x) - K(x)$
Grensekostnad og grenseinntekt	$K'(x)$ og $I'(x)$
Størst overskudd	$I'(x) = K'(x)$
Enhetskostnad	$E(x) = \frac{K(x)}{x}$
Lavest enhetskostnad	$K'(x) = E(x)$
Inntekt, etterspørsel $q(p)$	$I(p) = p \cdot q(p)$

Sannsynlighet

Binomialkoeffisient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Binomisk fordeling	$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
Hypergeometrisk, $n = n_1 + n_2$, $k = k_1 + k_2$	$P(X = k_1) = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$
Forventningsverdi	$\mu = E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$
Varians	$\mathrm{Var}(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$
Standardavvik	$\sigma = \mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
Binomisk fordeling	$E(X) = np$ og $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
Lineær omforming	$E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$ og $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$
Sum	$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Sum, uavhengige variabler	$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$
Tetthetsfunksjon f	$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Kontinuerlig fordeling	$E(X) = \int x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$

Normalfordeling

Tetthetsfunksjon	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Standardisering	$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ og $P(X \le x) = P(Z \le z)$
Innenfor $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$ og $\mu \pm 3\sigma$	Omtrent 68 %, 95 % og 99,7 %
Binomisk, $np(1-p) \ge 5$	$\mu = np$ og $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
Halvkorreksjon, Y normalfordelt	$P(a \le X \le b) \approx P(a - 0{,}5 < Y < b + 0{,}5)$

Sentralgrensesetningen

Sum av n uavhengige variabler	$E(S) = n \cdot \mu$ og $\mathrm{SD}(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma$
Gjennomsnitt av n uavhengige variabler	$E(\bar{X}) = \mu$ og $\mathrm{SD}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Hypotesetesting

Nullhypotese	$H_0 : p = p_0$ eller $H_0 : \mu = \mu_0$
Alternativ hypotese	$H_A : p > p_0$, $p < p_0$ eller $p \ne p_0$
Test av gjennomsnitt μ	$\bar{X}$ normalfordelt med μ_0 og $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. p-verdi: $P(\bar{X} \ge \bar{x})$
p-verdi, høyresidig	$P(X \ge a)$ når H_0 er sann
p-verdi, venstresidig	$P(X \le a)$ når H_0 er sann
Konklusjon	Forkast H_0 når p-verdien $< \alpha$ (tosidig: $\frac{\alpha}{2}$)

Programmering

Ledd og sum i en rekursiv følge

```
a = 3                  # første ledd
s = a                  # summen så langt
for n in range(2, 11):
    a = a * 1.5        # neste ledd
    s = s + a
    print(n, a, s)
```

Antall ledd før summen passerer en grense

```
a = 100
s = a
n = 1
while s < 5000:
    a = a + 20
    s = s + a
    n = n + 1
print(n)
```

Simulering av en sannsynlighet

```
import random

N = 100000
gunstige = 0
for i in range(N):
    hoyde = random.gauss(180, 7)
    if hoyde > 190:
        gunstige = gunstige + 1
print(gunstige / N)
```

Tilfeldige tall

Heltall fra 1 til 6	`random.randint(1, 6)`
Desimaltall i $[0, 1\rangle$	`random.random()`
Normalfordeling	`random.gauss(mu, sigma)`
Element fra liste	`random.choice(liste)`
k uten tilbakelegging	`random.sample(liste, k)`
Binomisk fordeling	`np.random.binomial(n, p)`
Hypergeometrisk	`np.random.hypergeometric(n1, n2, k)`

Kalkulator

Binomialkoeff. $\binom{n}{k}$	`n nCr k`, for eksempel `10 nCr 3` = 120
Ordnet utvalg	`n nPr k`, for eksempel `10 nPr 3` = 720
Fakultet	`n x!`, for eksempel `5 x!` = 120
Verditabell	`TABLE`: skriv inn $f(x)$, så start, slutt og steg
Neste ledd i geometrisk følge	Skriv a_1 og trykk `=`. Skriv så `Ans × 1,5` og trykk `=` én gang per ledd
Gjennomsnitt og standardavvik	Statistikkmodus (`STAT` eller `SD`): legg inn tallene, les av $\bar{x}$ og σ_x

Notasjon

Notasjon	Betyr
$\langle a, b\rangle$ og $[a, b]$	Åpent og lukket intervall
μ, σ og p	Forventning, standardavvik og andel
$\bar{x}$ og $\bar{X}$	Snitt i utvalget, og som variabel
Z	Normalfordelt med $\mu = 0$ og $\sigma = 1$
$\ln^2 x$ og $\ln x^2$	$(\ln x)^2$ og $\ln(x^2) = 2\ln\lvert x\rvert$
$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$	$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$	Alle reelle tall unntatt a
$[F(x)]_a^b$	$F(b) - F(a)$

Standard normalfordeling

Tabellen viser $P(Z \leq z)$. Raden gir z med én desimal, kolonnen den andre desimalen: $P(Z \leq 1{,}23) = 0{,}8907$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
−3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
−2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
−2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
−2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
−2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
−2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
−2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
−2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
−2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
−2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
−2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
−1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
−1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
−1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
−1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
−1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
−1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
−1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
−1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
−1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
−1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
−0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
−0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
−0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
−0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
−0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
−0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
−0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
−0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
−0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
−0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990