Formelark S1

KI · IKKE KONTROLLERT

Potenser

Samme grunntall	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ og $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potens av potens	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Produkt og brøk	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ og $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Null og negativ eksponent	$a^0 = 1$ og $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Brøk som eksponent	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ og $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Logaritmer

Definisjon	$10^{\lg x} = x$ og $e^{\ln x} = x$
Grunntall a	$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
Produkt	$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$
Kvotient	$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$
Potens	$\lg a^x = x \cdot \lg a$
Andre grunntall	Reglene gjelder også for ln og $\log_a$
Spesielle verdier	$\lg 1 = \ln 1 = 0$, $\lg 10 = 1$ og $\ln e = 1$
Skifte av grunntall	$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a} = \frac{\ln x}{\ln a}$
Omskriving	$a^x = e^{x \cdot \ln a}$
Eksponentiallikning	$a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\lg b}{\lg a}$
Logaritmelikning	$\lg x = c \Leftrightarrow x = 10^c$
Logaritmelikning, ln	$\ln x = c \Leftrightarrow x = e^c$
Gyldige løsninger	$\lg u$ og $\ln u$ krever $u > 0$
Likning i e^x eller $\lg x$	Sett $u = e^x$ eller $u = \lg x$
Ulikhet	$\lg a < 0$ når $0 < a < 1$. Husk å snu ulikhetstegnet når du dividerer med $\lg a$ i dette tilfellet

Algebra

Andregradslikning $ax^2 + bx + c = 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Faktorisering	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Kvadratsetningene	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Konjugatsetningen	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Symmetrilinje	$x = -\frac{b}{2a}$
Linje gjennom (x_1, y_1) og (x_2, y_2)	$y = a(x - x_1) + y_1$ der $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Vekst og modeller

Vekstfaktor	$b = 1 \pm \frac{p}{100}$
Eksponentiell modell	$f(x) = a \cdot b^x = a \cdot e^{kx}$ der $k = \ln b$
Vekstfaktor når y_1 blir y_2 på n perioder	$b = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{n}}$
Tid til verdien c	$x = \frac{\ln c - \ln a}{\ln b}$
Doblingstid og halveringstid	$\frac{\ln 2}{\ln b}$ og $\frac{\ln 0{,}5}{\ln b}$
Potensmodell	$f(x) = a \cdot x^b$, og $f(2x) = 2^b \cdot f(x)$

Grenseverdier og kontinuitet

Grenseverdien fins	$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$
f er kontinuerlig i a	$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Brøk som gir $\frac{0}{0}$	Faktoriser og forkort, sett så inn $x = a$
Kvadratrot som gir $\frac{0}{0}$	Utvid brøken med konjugatet
Brøk når $x \to \pm\infty$	Del teller og nevner på høyeste potens
Kjente grenser	$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ og $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$
Vertikal asymptote for $\frac{P(x)}{Q(x)}$	$x = a$ når $Q(a) = 0$ og $P(a) \neq 0$
Horisontal asymptote	$y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

Vekstfart og derivasjon

Gjennomsnittlig vekstfart i $[a, b]$	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Momentan vekstfart i $x = a$	$f'(a)$, stigningstallet til tangenten
Definisjon	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
Numerisk tilnærming, liten h	$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$k \cdot u$	$k \cdot u'$
$u \pm v$	$u' \pm v'$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$g(u(x))$	$g'(u) \cdot u'(x)$

Funksjonsdrøfting

Nullpunkt	$f(x) = 0$
Grafen stiger, synker	$f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$
Topp- eller bunnpunkt	$f'(x) = 0$, og f' skifter fortegn
Terrassepunkt	$f'(x) = 0$, og f' skifter ikke fortegn
Hul side opp, ned	$f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$
Vendepunkt	$f''(x) = 0$, og f'' skifter fortegn
Andrederiverttesten	$f'(a) = 0$ og $f''(a) < 0$ gir toppunkt, $f''(a) > 0$ gir bunnpunkt
Tangent i $(a, f(a))$	$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$
Størst og minst verdi i $[a, b]$	Sammenlign $f(a)$, $f(b)$ og verdiene der $f'(x) = 0$

Økonomi

Inntekt ved pris p og x solgte enheter	$I = p \cdot x$

Overskudd	$O(x) = I(x) - K(x)$
Grensekostnad og grenseinntekt	$K'(x)$ og $I'(x)$
Tolkning av grensekostnad	$K'(x) \approx K(x+1) - K(x)$
Størst overskudd	$O'(x) = 0$, altså $I'(x) = K'(x)$
Enhetskostnad	$E(x) = \dfrac{K(x)}{x}$
Lavest enhetskostnad	$E'(x) = 0$, altså $K'(x) = E(x)$

Kombinatorikk

Flere valg etter hverandre	Gang sammen antall muligheter i hvert valg
Rekkefølger av n elementer	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ og $0! = 1$
Ordnet utvalg med tilbakelegging	n^r
Ordnet utvalg uten tilbakelegging (nPr)	$\dfrac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$
Uordnet utvalg uten tilbakelegging (nCr)	$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Symmetri	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Sannsynlighet

Uniform modell	$P(A) = \dfrac{\text{gunstige utfall}}{\text{mulige utfall}}$
Komplement	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Minst én	$1 - P(\text{ingen})$
Addisjon	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Betinget sannsynlighet	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Produkt	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
Uavhengige hendelser	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Total sannsynlighet	$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})$
Bayes' setning	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$

Sannsynlighetsfordelinger

Stokastisk variabel X	$\sum P(X = x_i) = 1$
Binomisk fordeling, n uavhengige forsøk	$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
Hypergeometrisk fordeling, trekning uten tilbakelegging	$P(X = k_1) = \dfrac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$
Hypergeometrisk, størrelser	$n = n_1 + n_2$ i alt, $k = k_1 + k_2$ trekkes
Høyst k	$P(X \le k) = P(X = 0) + \cdots + P(X = k)$
Minst k	$P(X \ge k) = 1 - P(X \le k - 1)$
Minst én suksess på n forsøk	$P(X \ge 1) = 1 - (1-p)^n$
Antall forsøk når $P(X \ge 1) \ge q$	$n \ge \dfrac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)}$

Notasjon

Notasjon	Betyr
$\langle a, b \rangle$, $[a, b]$ og $[a, \to\rangle$	Åpent, lukket og ubegrenset intervall
D_f og V_f	Definisjonsmengde og verdimengde
$p \Rightarrow q$ og $p \Leftrightarrow q$	Implikasjon og ekvivalens
$\lg x$ og $\ln x$	Logaritme med grunntall 10 og med grunntall e
$n!$ og $\binom{n}{k}$	n fakultet, og n over k (antall uordnede utvalg)
$P(\overline{A})$ og $P(A \mid B)$	A skjer ikke, og A når vi vet at B har skjedd
$A \cap B$ og $A \cup B$	Både A og B, og A eller B (eller begge)

Programmering

Simulering av en sannsynlighet

```
from random import randint

N = 100000
gunstige = 0
for i in range(N):
    s = randint(1, 6) + randint(1, 6)
    if s == 9:
        gunstige = gunstige + 1
print(gunstige / N)
```

Eksakt sannsynlighet ved å telle utfall

```
gunstige = 0
for i in range(1, 7):
    for j in range(1, 7):
        if i + j >= 8:
            gunstige = gunstige + 1
print(gunstige / 36)
```

Numerisk derivert og toppunkt

```
def f(x):
    return x / (1 + x**2)

h = 0.0001
x = 0
while (f(x + h) - f(x)) / h > 0:
    x = x + 0.01
print(x, f(x))
```

Antall år før beløpet passerer en grense

```
belop = 0
aar = 0
while belop < 250000:
    belop = (belop + 10000) * 1.018
    aar = aar + 1
print(aar)
```

Tilfeldige tall og tellinger

Heltall fra 1 til 6	`random.randint(1, 6)`
Desimaltall i $[0, 1\rangle$	`random.random()`
Hendelse, sannsynlighet p	`random.random() < p`
Ett element	`random.choice(liste)`
k elementer, uten tilbakelegging	`random.sample(liste, k)`
Binomialkoeffisient	`math.comb(n, k)`

Kalkulator

Binomialkoeff. $\binom{n}{k}$	`n nCr k`, for eksempel `10 nCr 3` = 120
Ordnet utvalg	`n nPr k`, for eksempel `10 nPr 3` = 720
Fakultet	`n x!`, for eksempel `5 x!` = 120
Verditabell	`TABLE`: $f(x)$, så start, slutt og steg