Formelark R2

KI · IKKE KONTROLLERT

Følger og rekker

Summetegn	$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
Aritmetisk følge	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
Aritmetisk rekke	$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
Geometrisk følge	$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Geometrisk rekke	$s_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$
Uendelig geometrisk rekke	$s = \frac{a_1}{1-k}$ når $-1 < k < 1$
Konvergensområde, kvotient $k(x)$	Alle x som gir $-1 < k(x) < 1$
Rekursiv form	$a_{n+1} = a_n + d$ og $a_{n+1} = a_n \cdot k$
Ledd fra sum	$a_n = s_n - s_{n-1}$
Konvergent rekke	$\lim_{n\to\infty} s_n = s$
Divergenstest	Går ikke a_n mot 0, divergerer rekka

Induksjonsbevis

Steg 1	Vis at påstanden er sann for $n = 1$
Steg 2	Anta at den er sann for $n = k$, og vis at den da er sann for $n = k + 1$

Trigonometri

Radianer	$v = \frac{b}{r}$ og π rad $= 180°$
Bue og sirkelsektor	$b = r \cdot v$ og $A = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot v$
Enhetssirkelen	$P = (\cos v, \sin v)$, og $\tan v$ er stigningstallet til OP
Enhetsformelen	$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$
Tangens	$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ og $1 + \tan^2 v = \frac{1}{\cos^2 v}$
Motsatt vinkel	$\sin(-v) = -\sin v$ $\cos(-v) = \cos v$
Supplementvinkel	$\sin(\pi - v) = \sin v$ $\cos(\pi - v) = -\cos v$

Sum, differanse og dobbel vinkel

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$$

$$\sin 2u = 2 \cdot \sin u \cdot \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$$

Eksakte verdier

v	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Likninger

$\sin x = a$	$x = \sin^{-1} a + n \cdot 2\pi$ $x = \pi - \sin^{-1} a + n \cdot 2\pi$
$\cos x = a$	$x = \pm \cos^{-1} a + n \cdot 2\pi$
$\tan x = a$	$x = \tan^{-1} a + n \cdot \pi$
Del på $\cos x$	$a \sin x + b \cos x = 0$ gir $\tan x = -\frac{b}{a}$
Andregradslikning	Sett $u = \sin x$ (bruk enhetsformelen), løs for u
Kalkulator	Still inn på radianer (RAD)

Harmonisk svingning

$$f(x) = A \cdot \sin(kx + \varphi) + d$$

Likevektslinje	$y = d = \frac{f_{\text{maks}} + f_{\text{min}}}{2}$
Amplitude	$A = \frac{f_{\text{maks}} - f_{\text{min}}}{2}$
Periode	$p = \frac{2\pi}{k}$ og for $\tan kx$: $p = \frac{\pi}{k}$
Forskyvning mot høyre	$x_0 = -\frac{\varphi}{k}$, $kx + \varphi = k(x - x_0)$
Topp- og bunnpunkt	$\sin(kx + \varphi) = \pm 1$ gir $f(x) = d \pm A$
Størst vekstfart	$A \cdot k$, på likevektslinja
Omforming	$a \sin kx + b \cos kx = A \sin(kx + \varphi)$
φ i kvadranten til (a, b)	$A = \sqrt{a^2 + b^2}$ og $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

Derivasjon

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\sin(kx + c)$	$k \cdot \cos(kx + c)$
$\cos(kx + c)$	$-k \cdot \sin(kx + c)$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$g(u(x))$	$g'(u) \cdot u'(x)$

Integrasjon

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^r, $r \neq -1$	$\frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^{kx}	$\frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$
a^x	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$
$\ln x$	$x \cdot \ln x - x + C$

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\sin(kx+c)$	$-\frac{1}{k}\cdot\cos(kx+c)+C$
$\cos(kx+c)$	$\frac{1}{k}\cdot\sin(kx+c)+C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$
$g(ax+b)$	$\frac{1}{a}\cdot G(ax+b)+C$ der $G'=g$
Sum og konstant faktor	$\int(u\pm v)\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}x\pm\int v\,\mathrm{d}x$ $\int k\cdot u\,\mathrm{d}x=k\int u\,\mathrm{d}x$
Analysens fundamentalteorem, $F'=f$	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$
Derivert av integral	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)$
Integral som grenseverdi	$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\Delta x,\quad\Delta x=\frac{b-a}{n}$
Delvis integrasjon	$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x=u\cdot v-\int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$
Variabelskifte	$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(u)\,\mathrm{d}u$ der $u=g(x)$
Delbrøkoppspalting	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$
Trapesmetoden, $x_i=a+i\cdot\Delta x$	$\Delta x\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)$

Anvendelser

Areal mellom grafer, $f\geq g$	$A=\int_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$
Samlet endring (strekning fra fart)	$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t=f(b)-f(a)$
Gjennomsnittsverdi	$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Volum, tverrsnittsareal $A(x)$	$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$
Volum om x-aksen	$V=\pi\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x$
Volum om y-aksen, $x=g(y)$	$V=\pi\int_c^d(g(y))^2\,\mathrm{d}y$
Overflate om x-aksen, $f\geq 0$	$O=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$
Lengde av graf	$L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

Vektorer i rommet

Regneregler	$t\cdot\vec{a}=[ta_1,\,ta_2,\,ta_3]$. Sum, differanse og like vektorer: koordinatvis
Vektor mellom punkter	$\overrightarrow{AB}=[x_2-x_1,\,y_2-y_1,\,z_2-z_1]$
Lengde	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
Skalarprodukt	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
Vinkel mellom vektorer	$\cos v=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$
Ortogonale vektorer	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
Parallelle vektorer	$\vec{a}=t\cdot\vec{b}$, eller $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

Vektorprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b}=[a_2b_3-a_3b_2,\,a_3b_1-a_1b_3,\,a_1b_2-a_2b_1]$$

Retning	Vinkelrett på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$ (høyrehåndsregelen)
Lengde	$\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin v$
Parallellogram og trekant	$A=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$ og $A=\frac{\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert}{2}$
Parallellepiped	$V=\lvert(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\rvert$
Trekantet prisme	$V=\frac{\lvert(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\rvert}{2}$
Volum av firkantet og trekantet pyramide	$\frac{\lvert(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\rvert}{3}$ og $\frac{\lvert(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\rvert}{6}$

Linjer og plan

Linje gjennom $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, retningsvektor $[a,\,b,\,c]$	$l:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$
Plan gjennom P_0, normalvektor $[a,\,b,\,c]$	$a(x-x_0)+b(y-y_0)$ $+c(z-z_0)=0$
Plan gjennom P_0, vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i planet	$\alpha:\begin{cases}x=x_0+s\cdot u_1+t\cdot v_1\\y=y_0+s\cdot u_2+t\cdot v_2\\z=z_0+s\cdot u_3+t\cdot v_3\end{cases}$
Normalvektor, plan ABC	$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$
Skjæring linje–plan	Sett x, y og z fra linja inn i planlikningen, og løs for t
Avstand fra P_0 til planet $ax+by+cz+d=0$	$\frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Avstand fra P til linje gjennom A	$\frac{\lvert\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert}$
Avstand mellom linjer gjennom A og B, $\vec{u}\nparallel\vec{v}$	$\frac{\lvert\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\rvert}{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}$
Vinkel mellom to linjer	$\cos v=\frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$
Skjæringslinje mellom to plan	Retningsvektor $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, punkt: sett f.eks. $z=0$ og løs
Vinkel mellom to plan	$\cos v=\frac{\lvert\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert}$
Vinkel mellom linje og plan	$\sin v=\frac{\lvert\vec{v}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$

Kuler

Kuleflate, sentrum $S=(x_0,y_0,z_0)$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ $+(z-z_0)^2=r^2$
Kuleflate på parameterform	$\begin{cases}x=x_0+r\sin u\cos v\\y=y_0+r\sin u\sin v\\z=z_0+r\cos u\end{cases}$ $u\in[0,\pi]$ og $v\in[0,2\pi]$
Fullstendig kvadrat	$x^2+px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$

Plan og kule, avstand h fra S til planet	$h = r$: tangerer. $h < r$: sirkel med radius $\sqrt{r^2 - h^2}$
Tangentplan i P	Normalvektor $\overrightarrow{SP}$
Kule	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \quad \text{og} \quad O = 4\pi r^2$
Kjegle og pyramide	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \quad \text{og} \quad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Bevegelse langs en kurve

Posisjon	$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$
Fart og akselerasjon	$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ og $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t)$
Banefart	$\lvert\vec{v}(t)\rvert = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$
Lengde av kurven	$\int_a^b \lvert\vec{v}(t)\rvert \, \mathrm{d}t$
Avstand mellom to objekter	$\lvert\vec{r}(t) - \vec{s}(t)\rvert$

Notasjon

Notasjon	Betyr
$\langle a, b\rangle$ og $[a, b]$	Åpent og lukket intervall
$\langle \leftarrow, a]$ og $[a, \rightarrow\rangle$	Alle tall til og med a, og fra og med a
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	Naturlige tall, heltall, rasjonale tall, reelle tall
$x \in A$ og $A \setminus B$	x er element i A, og A uten B
$A \cup B$ og $A \cap B$	Union (eller) og snitt (og)
D_f og V_f	Definisjonsmengde og verdimengde
$p \Rightarrow q$ og $p \Leftrightarrow q$	Implikasjon og ekvivalens
$\sin^2 x$ og $\sin x^2$	$(\sin x)^2$ og $\sin(x^2)$
$\sin^{-1} x$	Vinkelen med sinusverdi x, ikke $1/\sin x$
$\lvert x\rvert$	Absoluttverdien til x
$\lim_{x \to a} f(x)$	Grenseverdien til $f(x)$ når x går mot a
$f'(x)$ og $f''(x)$	Første- og andrederivert. Også $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
$[F(x)]_a^b$	$F(b) - F(a)$
$\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ og $\lvert\vec{a}\rvert$	Vektor, vektor fra A til B, og lengden av $\vec{a}$
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$	Skalarprodukt (et tall) og vektorprodukt (en vektor)
$\vec{a} \perp \vec{b}$ og $\vec{a} \parallel \vec{b}$	Ortogonale og parallelle
$\angle(\vec{a}, \vec{b})$	Vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Programmering

Numerisk integrasjon med rektangler

```python
from math import sin, pi
def f(x):
    return 2 * sin(x)
a, b, n = 0, pi, 1000
dx = (b - a) / n
areal = 0
for i in range(n):
    x = a + i * dx          # venstre endepunkt
    areal = areal + f(x) * dx
print(areal)
```

Høyre endepunkt	`x = a + (i + 1) * dx`
Midtpunkt	`x = a + (i + 0.5) * dx`
Trapes, ledd i summen	`(f(x) + f(x + dx)) / 2 * dx`

Rekursiv følge, sum og antall ledd

```python
a = 3                   # første ledd
s = a                   # summen så langt
n = 1
while s < 5000:
    a = 2 * a - 1       # neste ledd
    s = s + a
    n = n + 1
print(n, a, s)
```

Newtons metode for $f(x) = 0$

```python
from math import cos, sin
def f(x):
    return cos(x) - x       # løser cos x - x = 0
def df(x):
    return -sin(x) - 1      # f'(x)
x = 1                       # startverdi
while abs(f(x)) > 1e-10:    # til f(x) er nesten 0
    x = x - f(x) / df(x)    # neste tilnærming
print(x)
```