# Formelark R1

KI · IKKE KONTROLLERT



## Algebra

| | |
|---|---|
| Kvadratsetningene | $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ |
| Konjugatsetningen | $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ |
| Andregradslikning $ax^2+bx+c=0$ | $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Faktorisering | $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ |
| Nullpunktsetningen | $P(a)=0 \Leftrightarrow (x-a)$ er faktor i $P(x)$ |
| Linje gjennom $(x_1,y_1)$ med stigningstall $a$ | $y = a\cdot(x-x_1)+y_1$ |
| Potenser | $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ og $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ |
| Negativ eksponent, rot | $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$ og $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ |
| Potens av potens | $(a^p)^q = a^{p\cdot q}$ |

## Logaritmer

| | |
|---|---|
| Definisjon | $10^{\lg x} = x$ og $e^{\ln x} = x$ |
| Grunntall $a$ | $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ |
| Bytte av grunntall | $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{\lg x}{\lg a}$ |
| Produkt (også for lg) | $\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b$ |
| Kvotient | $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ |
| Potens | $\ln a^x = x\cdot \ln a$ |
| Spesielle verdier | $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ og $\lg 10 = 1$ |
| Eksponentiallikning | $a^x = b \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln b}{\ln a}$ |
| Logaritmelikning | $\ln x = b \Leftrightarrow x = e^b$, og $x>0$ |
| Likning med $e^{2x}$ og $e^x$ | Sett $u = e^x$, bare $u>0$ gir løsning |
| Likning med $(\ln x)^2$ og $\ln x$ | Sett $u = \ln x$ |

## Omvendte funksjoner

| | |
|---|---|
| $f$ har en omvendt funksjon $g$ | $f$ er strengt voksende eller strengt avtagende i hele $D_f$ |
| Sammenheng | $g(f(x)) = x$ og $f(g(x)) = x$ |
| Uttrykk for $g$ | Løs $y = f(x)$ med hensyn på $x$, bytt så $x$ og $y$ |
| Definisjons- og verdimengde | $D_g = V_f$ og $V_g = D_f$ |
| Grafene | Speilbilder av hverandre om linja $y = x$ |
| Derivert, der $b = f(a)$ | $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ |

## Grenseverdier og kontinuitet

| | |
|---|---|
| Grenseverdien finnes | $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ |
| Kontinuerlig i $x=a$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ |
| Deriverbar i $x=a$ | Kontinuerlig i $a$, og $f'(x)$ har samme grenseverdi fra venstre og fra høyre |
| Uttrykk av typen $\frac{0}{0}$ | Faktoriser og forkort |
| $x \to \pm\infty$ i brøk | Del teller og nevner på høyeste potens av $x$ |
| Kjente grenseverdier | $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ og $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ |

## Derivasjon

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

| | |
|---|---|
| Gjennomsnittlig vekstfart i $[a,b]$ | $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ |
| Momentan vekstfart i $x=a$ | $f'(a)$, stigningstallet til tangenten |
| Ikke deriverbar i $x=a$ | Grafen har knekk eller brudd i $a$, f.eks. $\lvert x\rvert$ i $x=0$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $k$ | $0$ |
| $x^r$ | $r\cdot x^{r-1}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $e^{kx}$ | $k\cdot e^{kx}$ |
| $a^x$ | $a^x\cdot \ln a$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x\cdot \ln a}$ |
| $k\cdot u$ | $k\cdot u'$ |
| $u \pm v$ | $u' \pm v'$ |
| $u\cdot v$ | $u'\cdot v + u\cdot v'$ |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$ |
| $g(u(x))$ | $g'(u)\cdot u'(x)$ |
| $u^r$ | $r\cdot u^{r-1}\cdot u'$ |
| $e^u$ | $e^u\cdot u'$ |
| $\ln u$ | $\dfrac{u'}{u}$ |

## Funksjonsdrøfting

| | |
|---|---|
| Nullpunkt | $f(x)=0$ |
| Nullpunkt med Newtons metode | $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ |
| Voksende og avtagende | $f'(x)>0$: $f$ vokser, $f'(x)<0$: $f$ avtar |
| Stasjonært punkt | $f'(x)=0$ |
| Topp- eller bunnpunkt | $f'(x)=0$, og $f'$ skifter fortegn |
| Terrassepunkt | $f'(x)=0$, og $f'$ skifter ikke fortegn |
| Vendepunkt | $f''(x)=0$, og $f''$ skifter fortegn |
| Krumning | $f''(x)>0$: hul side opp, $f''(x)<0$: hul side ned |
| Andrederiverttesten | $f'(a)=0$ og $f''(a)<0$ gir toppunkt, $f''(a)>0$ gir bunnpunkt |
| Størst og minst verdi i $[a,b]$ | Sammenlign $f(a)$, $f(b)$ og verdiene der $f'(x)=0$ |
| Tangent i $(a,f(a))$ | $y = f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$ |
| Vertikal asymptote for $\frac{P(x)}{Q(x)}$ | $x=a$ når $Q(a)=0$ og $P(a)\neq 0$ |
| Horisontal asymptote | $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ |
| Skrå asymptote | Kvotienten i polynomdivisjonen $P(x):Q(x)$ |

## Vekstmodeller

| | |
|---|---|
| Eksponentiell vekst | $f(x) = a \cdot b^x = a \cdot e^{kx}$ der $k = \ln b$ |
| Vekstfaktor ved $p$ % endring per enhet | $b = 1 \pm \frac{p}{100}$ |
| Gjennom $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ | $b = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$ |
| Doblingstid | $T_2 = \frac{\ln 2}{k}$ |
| Halveringstid | $T_{1/2} = \frac{\ln 0{,}5}{k}$ |
| Logistisk vekst, bæreevne $N$ | $f(x) = \frac{N}{1 + a \cdot e^{-kx}}$ |
| Vekstfart | $f'(x) = \frac{N \cdot a \cdot k \cdot e^{-kx}}{(1 + a \cdot e^{-kx})^2}$ |
| Vendepunkt, størst vekstfart | $x = \frac{\ln a}{k}$ og $f(x) = \frac{N}{2}$ |
| Største vekstfart | $\frac{k \cdot N}{4}$ |
| Løsning av $f(x) = c$ | $x = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{a \cdot c}{N - c}$ |

## Vektorer

| | |
|---|---|
| $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ | $\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1,\ y_2 - y_1]$ |
| Sum | $[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2,\ y_1 + y_2]$ |
| Vektorsum | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ |
| Tall ganger vektor | $t \cdot [x, y] = [t \cdot x,\ t \cdot y]$ |
| Lengde av $\vec{a} = [x, y]$ | $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| Midtpunkt på $AB$ | $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ |
| Sirkel, sentrum $(x_0, y_0)$ og radius $r$ | $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ |
| Sentrum og radius fra likningen | Fullfør kvadratene i $x$ og $y$ |
| Skalarprodukt | $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\alpha$ |
| Med koordinater | $[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 x_2 + y_1 y_2$ |
| Vinkel mellom vektorer | $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$ |
| Ortogonale, $\vec{a} \perp \vec{b}$ | $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ |
| Parallelle, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ | $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$, altså $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ |
| Tre punkter på linje | $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ |
| Lengde $k$ i retning $\vec{a}$ | $\frac{k}{\lvert\vec{a}\rvert} \cdot \vec{a}$ |
| Kvadrat | $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$ |
| Kvadrat av sum | $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}$ |
| Normalvektor | $[-y, x] \perp [x, y]$ |
| Areal av trekant | $\frac{1}{2} \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \lvert x_1 y_2 - x_2 y_1\rvert$ |

| $\alpha$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

## Parameterframstilling

| | |
|---|---|
| Linje gjennom $(x_0, y_0)$ med retningsvektor $[a, b]$ | $l: \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$ |
| Stigningstall | $\frac{b}{a}$ når $a \neq 0$ |
| Skjæring med aksene | $y = 0$ gir $x$-aksen, $x = 0$ gir $y$-aksen |
| Skjæring mellom to linjer | Ulike parametre $t$ og $s$, løs likningssystemet |
| To objekter møtes | Samme posisjon for samme $t$ |
| Nærmeste punkt $Q$ på linja fra $P$ | $\overrightarrow{PQ} \cdot [a, b] = 0$, avstanden er $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ |

### Vektorfunksjoner

| | |
|---|---|
| Posisjon | $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$ |
| Fart | $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [x'(t), y'(t)]$ |
| Banefart | $\lvert\vec{v}(t)\rvert = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ |
| Akselerasjon | $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = [x''(t), y''(t)]$ |
| Høyeste eller laveste punkt | $y'(t) = 0$ |
| Konstant fart $\vec{v}$ fra $\vec{r}_0$ | $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}$ |
| Avstand mellom objekter | $\lvert\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)\rvert$ |

## Notasjon

| Notasjon | Betyr |
|---|---|
| $\langle a, b\rangle$ og $[a, \rightarrow\rangle$ | Åpent og ubegrenset intervall |
| $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ | Naturlige, hele, rasjonale og reelle tall |
| $D_f$ og $V_f$ | Definisjonsmengde og verdimengde |
| $p \Rightarrow q$ og $p \Leftrightarrow q$ | Implikasjon og ekvivalens |
| $x \to a^-$ og $x \to a^+$ | $x$ går mot $a$ fra venstre og fra høyre |
| $\lg x$ og $\ln x$ | Logaritme, grunntall 10 og $e$ |
| $A(x, y)$ og $[x, y]$ | Punkt og vektor |

## Programmering

### Numerisk derivasjon

```
def f(x):
    return x**3 - 2*x

def df(x):
    h = 0.0001
    return (f(x + h) - f(x - h)) / (2*h)

print(df(2))
```

### Grenseverdi når $x \to 1$

```
def f(x):
    return (x**2 - 1) / (x - 1)

h = 0.1
for i in range(5):
    print(1 - h, f(1 - h), 1 + h, f(1 + h))
    h = h / 10
```

### Toppunkt med løkke

```
x = 0
dx = 0.001
while f(x + dx) > f(x):    # grafen stiger
    x = x + dx
print(x, f(x))
```

### Halveringsmetoden for $f(x) = 0$

```
a = 1                          # f(a) og f(b) har
b = 2                          # ulike fortegn
while b - a > 0.0001:
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) < 0:
        b = m
    else:
        a = m
print(m)
```

| | |
|---|---|
| $\ln x$, $\lg x$ og $e^x$ | `math.log(x)`, `math.log10(x)`, `math.exp(x)` |
| $\sqrt{x}$ og $\lvert x\rvert$ | `math.sqrt(x)`, `abs(x)` |
| To desimaler | `round(x, 2)` |

## Kalkulator

| | |
|---|---|
| Verditabell | TABLE: $f(x)$, så start, slutt og steg |
| Vinkler i grader | Still kalkulatoren på DEG |