R2 – dette må du mestre

11.10.26

Laget av KI: snakk med læreren din først

Denne oversikten er laget av KI ut fra tidligere eksamensoppgaver. Den kan ta feil, og den kjenner ikke deg. Læreren din vet best hva *du* bør øve på, så spør læreren først.

Står du helt på bar bakke, eller leser du til privatisteksamen, kan du bruke arket som et utgangspunkt for øvingen.

Denne siden bygger på alle de sju eksamenene i R2 etter den nye læreplanen, fra våren 2023 til våren 2026, og på UDIRs eksempeloppgaver for Del 2 etter den nye ordningen (E26). Vi har sortert oppgavene i oppgavetyper og telt hvor ofte hver type har vært med.

- **Karakter 2:** Forbered deg på alt i de grønne boksene. Det er de enkleste delene av oppgavetypene som er med på (nesten) *hver* eksamen. Du trenger ikke få til alt for å få 2, men jo mer av det du kan, jo tryggere er du.
- **Karakter 4:** Forbered deg i tillegg på de blå boksene. Heller ikke her må du kunne alt for å få 4, men har du forberedt deg på alt, kan du også få 5 eller 6.
- **Øv på:** Under hver oppgavetype står eksamensoppgaver å øve på. QR-koden legger alle eksamensoppgavene av typen inn i *Mine oppgaver* på matematikkoppgaver.no.

Ny eksamensordning fra våren 2027

Fra våren 2027 er det ikke lov med datamaskin på Del 2, bare enkel vitenskapelig kalkulator. Guiden bygger nå også på UDIRs eksempeloppgaver fra 15. oktober 2026 (E26). Der er oppgavene som krevde datamaskin, i stor grad *skrevet om*, ikke tatt ut: Du tegner grafer for hånd, begrunner at en modell passer, leser av parametere på en graf og velger riktig likning i stedet for å løse den i GeoGebra. Du må integrere, løse trigonometriske likninger og regne med vektorer selv. Programmering er fortsatt med, også på Del 2, men på papir.

Oversikt

Oppgavetype	Del	Med på	Karakter 2	Karakter 4
Integralregning	1 (i E26 også 2)	7 av 7	✓	✓
Areal og tolkning av integraler	1 og 2	6 av 7	✓	✓
Aritmetiske og geometriske rekker	1 og 2	7 av 7	✓	✓
Eksakte verdier og trigonometriske likninger	1 (i E26 også 2)	6 av 7	✓	✓
Vektorer, plan og avstander	1 og 2	7 av 7	✓	✓
Kuleflater	1 og 2	4 av 7, hel oppgave i E26	✓	✓
Lese og forklare kode	1	5 av 7	✓	✓

Oppgavetype	Del	Med på	Karakter 2	Karakter 4
Posisjon og fart i rommet	2	7 av 7	✓	✓
Sinusfunksjoner og sinusmodeller	1 og 2	6 av 7	✓	✓
Omdreiningslegemer	1 og 2	4 av 7	✓	✓
Rekursjon og induksjon	1 og 2	7 av 7	✓	✓
Programmering for hånd	2	5 av 7 (på PC), to i E26	✓	✓

Slik er eksamen

Del	Hjelpemidler fra våren 2027
Del 1	Skrivesaker og linjal
Del 2	Egne notater på papir, trykte hjelpemidler og enkel vitenskapelig kalkulator (kvadratrot, logaritmer, sin/cos/tan og standardavvik; ikke grafisk, ikke programmerbar, kan ikke løse likninger)

Del 1 varte i 2 timer fra 2023 til 2024 og ga 20–24 av 48–54 poeng. Fra V25 har Del 1 vart i 3 timer og gitt 30 av 49–50 poeng. Eksamenstiden og poengfordelingen fra 2027 er ikke kjent ennå, og UDIR skriver at eksempeloppgavene ikke viser hvor mange oppgaver eller hvor mye tid det blir. Fra 2027 er oppgavene nummerert fortløpende, så Del 2 begynner ikke på oppgave 1. De lette deloppgavene ga bare 4–12 poeng per sett, så i R2 må du også få til en del middels deloppgaver. Still kalkulatoren i radianmodus når du regner med trigonometriske funksjoner.

Øv med hele eksamenssett

Det viktigste rådet: Gjør hele eksamenssett på tid, *uten* mer hjelp enn du har lov til på eksamen. Ingen løsningsforslag, ingen nettsøk og ingen KI før du er ferdig.

Når	Gjør dette
14 dager før eksamen	Ett helt eksamenssett på tid
7 dager før eksamen	Et nytt eksamenssett
2 dager før eksamen	Et siste eksamenssett

Skriv ned hvor mange poeng du fikk til uten hjelp hver gang, og se etterpå på oppgavene du ikke klarte. Jobber du jevnt og trutt mellom settene, får du til mer og mer. Bruk oppgavetypene under til å øve på det du ikke fikk til.

Oppgavetyper som oftest er på Del 1

Inndelingen viser hvor oppgavetypene oftest har stått. Alle temaene kan komme på begge delene: I eksempeloppgavene (E26) står integrasjon, trigonometriske identiteter og vektorer på Del 2.

Integralregning

Slik ser det ut

Del 1 · med på 7 av 7, alltid som oppgave 1 · 2–6 poeng

«Bestem integralene» $\int_0^2 (e^{2x} + x)dx$ og $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$ (V26). Den første deloppgaven er ofte et bestemt integral av et polynom eller en eksponentialfunksjon. I E26 må du også integrere for hånd på Del 2, blant annet med delvis integrasjon i et omdreiningslegeme.

Alle oppgavene om integralregning (11)

Karakter 2

- Kunne de grunnleggende integralene: $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$, $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ og $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.
- Regne ut et bestemt integral med $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$: $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$.
- Variabelskifte når den deriverte av kjernen står som faktor: Med $u = \sin x$ blir $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$.
- Delvis integrasjon på x ganger $\cos x$ eller e^x: $\int 4x \cos x\,dx = 4x \sin x + 4\cos x + C$.

Øv på: To bestemte integraler, Ubestemt integral med substitusjon, Ubestemt integral med delvis integrasjon, Bestemt og ubestemt integral (a)

Karakter 4: i tillegg

- Se selv hvilken metode du skal bruke: $\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx$ har telleren lik den deriverte av nevneren, så svaret er $\ln|x^2 - x - 6| + C$.
- Delvis integrasjon med $\ln x$: I $\int x^2 \ln x\,dx$ deriverer du $\ln x$ og integrerer x^2. Svaret er $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$.
- Variabelskifte med trigonometri eller ln inni: $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = -\cos(\ln x) + C$.
- Kontrollere svaret ved å derivere det.

Øv på: Integraler S2 v25, Integral med delvis integrasjon og trigonometri, Tangens, derivert og integral

Areal og tolkning av integraler

Slik ser det ut

Del 1, av og til Del 2 · med på 6 av 7 · 2–6 poeng

Du skal finne $f(x)$ når $f'(x) = \frac{2}{x^2}$ og grafen går gjennom $(2, 2)$, og så arealet av området som er avgrenset av $g(x) = x$ og $h(x) = -\frac{3}{x} + 4$ (V26).

Alle oppgavene om areal og tolkning av integraler (10)

Karakter 2

- Vite at et integral er areal *med fortegn*: $\int_{-1}^{1}(x^3 + 2x)\,dx = 0$ betyr at arealet over x-aksen er like stort som arealet under (H23).
- Finne $f(x)$ fra $f'(x)$ og ett punkt: Integrer, og bruk punktet til å finne C.
- Vite at arealet under en fartsgraf er strekningen.

Øv på: Bestemt integral 3, Bestemt integral og areal (a), Antiderivasjon og areal mellom grafer (a), Sanne og usanne påstander om fart og vinkel

Karakter 4: i tillegg

- Areal mellom x-aksen og en graf som krysser aksen: Del opp i nullpunktene og ta tallverdien av integralene under aksen.
- Areal mellom to grafer: Finn skjæringspunktene og regn ut $\int_a^b(\text{øverste} - \text{nederste})\,dx$. For g og h over er skjæringspunktene $x = 1$ og $x = 3$, og arealet er $\int_1^3\left(-\frac{3}{x} + 4 - x\right)dx = 4 - 3\ln 3 \approx 0{,}70$.
- Velge riktig integraluttrykk for et markert område på en figur, og begrunne valget.
- Bruke integral i praksis: Strekning er $\int_a^b v(t)\,dt$, og gjennomsnittsverdien av f er $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Øv på: Antiderivasjon og areal mellom grafer, Areal mellom cosinus og sinus, Tolkning av integral og areal fra graf, Bestem f ut fra den deriverte, Harens fart og gjennomsnittsfart

Aritmetiske og geometriske rekker

Slik ser det ut

Del 1 på 6 av 7, og i Del 2 · med på 7 av 7 · 2–6 poeng

«En uendelig geometrisk rekke konvergerer mot 8. Bestem summen av de fire første leddene, når du får vite at $a_1 = 4$» (H23), eller «Finn summen av den aritmetiske rekken $3 + 7 + 11 + \ldots + 399$» (H24).

Alle rekkeoppgavene (12)

Karakter 2

- Kjenne igjen typen: Aritmetisk rekke har fast differanse d, geometrisk rekke har fast kvotient k.
- Aritmetisk sum: Finn antall ledd først. I $3 + 7 + \ldots + 399$ er $n = \frac{399-3}{4} + 1 = 100$, og $S_{100} = \frac{3+399}{2} \cdot 100 = 20\,100$.
- Uendelig geometrisk rekke: $S = \frac{a_1}{1-k}$ når $-1 < k < 1$. Med $a_1 = 4$ og $S = 8$ blir $k = \frac{1}{2}$.
- Geometrisk delsum: $S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$, så $S_4 = 4 \cdot \frac{(1/2)^4 - 1}{1/2 - 1} = \frac{15}{2}$.

Øv på: Uendelig geometrisk rekke, Sumformel, kvotient og geometrisk rekke (a og b), Aritmetisk og geometrisk rekke (a)

Karakter 4: i tillegg

- Konvergensområde når kvotienten har x i seg: $5 + 5\left(\frac{1}{2} - x\right) + \ldots$ konvergerer når $-1 < \frac{1}{2} - x < 1$, altså $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.
- Sette opp rekken selv fra en tekst: En ball faller fra 2 m og spretter opp 75 % hver gang. Den beveger seg $2 + 2 \cdot \frac{1{,}5}{1-0{,}75} = 14$ meter til sammen.
- Skrive et periodisk desimaltall som geometrisk rekke: $0{,}757\,575\ldots = 0{,}75 + 0{,}75 \cdot 0{,}01 + \ldots$
- Sparing og stoff som hoper seg opp i kroppen: Første ledd, kvotient og antall ledd må stemme med teksten. Grenseverdien er summen av den uendelige rekken.
- Konvergens for rekker som ikke er geometriske: En rekke kan bare konvergere hvis leddene går mot 0. Med $a_n = (a_{n-1} - 1)^2$ og $a_1 = 1$ blir leddene $1, 0, 1, 0, \ldots$, så rekken divergerer (E26).

Øv på: Aritmetisk rekke, Aritmetisk og geometrisk rekke - treplatetårn, CCl4-konsentrasjon og geometrisk rekke, Noras sparing og lån, Vurder påstander om rekke, plan og areal, Rekursiv rekke og konvergens E26 (b og c)

Eksakte verdier og trigonometriske likninger

Slik ser det ut

Del 1, i H23 på Del 2 · med på 6 av 7 · 2–6 poeng

«Bestem $\sin v$ og $\tan v$ når $\cos v = \frac{2}{3}$ og v er en vinkel i 4. kvadrant. Løs likningen $2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \sqrt{3}$ for $x \in \langle 0, 10\rangle$» (V26).

Alle oppgavene om eksakte verdier og trigonometriske likninger (9)

Karakter 2

- Kunne definisjonen av radianen: Vinkelen i radianer er buen delt på radien, $v = \frac{b}{r}$. Er buen 4 og radien 3, er vinkelen $v = \frac{4}{3}$ radianer.
- Gjøre om mellom grader og radianer: $80° = 80 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$.
- Kunne de eksakte verdiene for $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{3}$ utenat, og finne dem i enhetssirkelen.
- Bruke $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ og fortegnet i kvadranten: Er $\cos v = \frac{2}{3}$ i 4. kvadrant, er $\sin v = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ og $\tan v = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Øv på: Radianer og eksakte trigonometriske verdier, Vinkel i sirkel og trigonometri, Trigonometriske verdier og likning (a), Sanne og usanne påstander om fart og vinkel

Karakter 4: i tillegg

- Løse $\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ med begge løsningene: $u = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$. Med $u = \frac{\pi}{3}x$ blir $x = \pm\frac{1}{2} + 6k$, og i $\langle 0, 10\rangle$ er $L = \{\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}\}$.
- For sinus er de to løsningene v og $\pi - v$. Del på tallet foran x til slutt, og velg k så du får alle løsningene i intervallet.
- Dele på $\cos x$ når høyresiden er 0: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ gir $\tan x = \sqrt{3}$, altså $x = \frac{\pi}{3}$ eller $x = \frac{4\pi}{3}$.
- Slå sammen $a\sin kx + b\cos kx$ til $A\sin(kx + \varphi)$ med $A = \sqrt{a^2 + b^2}$: $3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.
- Bruke identitetene $\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v$ og $\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ til å vise at en likhet er en identitet: $4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x$.
- Motbevise en påstått identitet med ett moteksempel: $\sin 3v = 3\sin v - 3\sin^3 v$ stemmer ikke for $v = \frac{\pi}{2}$, for venstresiden er -1 og høyresiden 0. I E26 kom dette som sann/usann-påstander på Del 2.

Øv på: Trigonometriske likninger og antall løsninger, Trigonometrisk funksjon og likning, Sinusfunksjon og cosinusfunksjon, Sann eller usann om trigonometriske identiteter

Vektorer, plan og avstander

Slik ser det ut

Del 1 på alle, av og til Del 2 · med på 7 av 7 · 2–8 poeng

Tre punkter, som $A(0,0,0)$, $B(3,1,2)$ og $C(-1,3,1)$ i et telt. «Bestem arealet av bunnen i teltet» (H24). Eller et plan, et punkt og spørsmål om avstand og normallinje (H23).

Alle oppgavene om vektorer, plan og avstander (12)

Karakter 2

- Finne vektoren mellom to punkter: $\overrightarrow{AB} = [3,1,2]$.
- Regne ut kryssproduktet: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1 \cdot 1 - 2 \cdot 3,\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1,\ 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)] = [-5,-5,10]$.
- Arealet av trekanten er $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.
- Sjekke om et punkt ligger i et plan ved å sette koordinatene inn i planlikningen.

Øv på: Telt med vektorer i rommet (a), Plan og tangerende kuleflate (a)

Karakter 4: i tillegg

- Planlikning fra et punkt og en normalvektor: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. Normalvektoren til et plan gjennom tre punkter er kryssproduktet.
- Parameterframstilling for en linje gjennom et punkt, normalt på et plan: Bruk normalvektoren som retningsvektor.
- Avstand fra punkt til plan: $\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Fra $A(4,2,2)$ til $x-2y+2z+1=0$ blir det $\frac{|4-4+4+1|}{3} = \frac{5}{3}$.
- Volum av pyramide med trekantgrunnflate: $\frac{1}{6}\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$. Vinkler med skalarproduktet.

Øv på: Plan, normalvektor og avstand til punkt, Pyramide med fire punkter i rommet, Trekant og plan i rommet, Bordplate som trekant i 3D, Areal av sideflaten i avkortet pyramide, Bevis at ortogonale vektorer oppfyller Pytagoras

Kuleflater

Slik ser det ut

Del 1 og Del 2 · med på 4 av 7 · ofte de siste deloppgavene i en vektoroppgave, i E26 en hel oppgave med fire deloppgaver på Del 2

Du skal finne sentrum og radius til kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 4$, og avgjøre om planet $3x + y - 2z + 1 = 0$ skjærer en kuleflate med sentrum $(1, -1, 3)$ og radius 2 (H25). I E26 er kuleflaten $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$, og du skal blant annet finne den minste avstanden fra kuleflaten til origo og vinkelen mellom en linje og xy-planet.

Alle oppgavene om kuleflater (4)

Karakter 2

- Lese av sentrum og radius når likningen står på formen $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$: $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$ har sentrum $(3, 0, -4)$ og radius 4.
- Minste avstand fra et punkt utenfor til kuleflaten er avstanden til sentrum minus radien: Origo ligger $\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$ fra sentrum, så den minste avstanden er $5 - 4 = 1$.

Øv på: Avstand, vinkel og tangentplan for kuleflate (a)

Karakter 4: i tillegg

- Fullføre kvadratene: $x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 2z = 4$ blir $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$, så sentrum er $(2, 0, -1)$ og radius 3.
- Tangentplan: Normalvektoren er vektoren fra sentrum til tangeringspunktet.
- Skjærer planet kula? Sammenlign avstanden fra sentrum til planet med radien: $\frac{|3-1-6+1|}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0{,}80 < 2$, så planet skjærer.
- Vinkel mellom en linje og et plan: Finn vinkelen mellom retningsvektoren og normalvektoren til planet, og ta 90° minus den. Linjen gjennom origo og $(3, 0, -4)$ danner vinkelen 36,9° med normalvektoren $[0, 0, 1]$, så vinkelen med xy-planet er 53,1°.
- To kuleflater: Sammenlign avstanden mellom sentrene med radiene. De skjærer ikke når avstanden er større enn summen av radiene, eller når den ene kula ligger helt inni den andre.

Øv på: Kuleflate og tangentplan, Kuleflate og plan, Plan og tangerende kuleflate, Parallelle plan og kule, Avstand, vinkel og tangentplan for kuleflate

Lese og forklare kode

Slik ser det ut

Del 1, én gang Del 2 · med på 5 av 7 · 2–6 poeng · alle settene har programmering, men i to av dem bare som å skrive egen kode på Del 2

Et kort Python-program med en løkke. «Forklar hva eleven ønsker å regne ut. Hva blir resultatet når programmet kjøres, dersom N settes til 100 i linje 4?» (V23). Du skal *lese* koden og regne ut svaret for hånd.

Alle oppgavene om å lese og forklare kode (6)

Karakter 2

- Gå gjennom løkka for hånd to–tre ganger og skriv ned verdiene. Si hva hver variabel står for.
- Kjenne igjen en aritmetisk rekke i koden: `a = a + d` med `S = S + a`. Med $a_1 = 3$, $d = 4$ og 100 ledd blir summen $\frac{3+399}{2} \cdot 100 = 20\,100$.

Øv på: Sum av aritmetisk rekke med kode, Ukjent program h23 (a)

Karakter 4: i tillegg

- Kjenne igjen en `while`-løkke som går til summen passerer en grense, og finne svaret med sumformelen.
- Kjenne igjen en rektangelsum: `S = S + f(x)*dx` regner ut $\int f(x)\,dx$ omtrent. Regn ut integralet eksakt. Med `abs(f(x))` er det arealet.
- Forklare hvorfor venstre og høyre endepunkt gir for lite og for mye når funksjonen vokser.

Øv på: Ukjent program S2 v24, Caspers kode, Ukjent program h23, Programmering og numerisk integrasjon

Oppgavetyper som oftest er på Del 2 (kalkulator)

Posisjon og fart i rommet

Slik ser det ut

Del 2 · med på 7 av 7, ofte som oppgave 1 · 6 poeng (8 i H23)

Posisjonen til en fotball etter t sekunder er $\vec{r}(t) = \left[30t,\ 5t,\ 7t - 4{,}9t^2\right]$. «Hvor stor er farten til ballen idet den blir skutt?» og «Hvor langt fra hjørnemerket er ballen når den treffer fotballbanen igjen?» (V24).

Alle oppgavene om posisjon og fart i rommet (7)

Karakter 2

- Sette inn en verdi for t: Med $\vec{r}(t) = \left[2t,\ 4t,\ 6 - 0{,}7t - 4{,}9t^2\right]$ er taket $z(0) = 6$ m over bakken, og $\vec{r}(0{,}5) = [1,\ 2,\ 4{,}425]$ (H24).
- Derivere hver koordinat for å få fartsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$.
- Farten (banefarten) er lengden av fartsvektoren: $\vec{v}(0) = [30, 5, 7]$ gir $|\vec{v}(0)| = \sqrt{974} \approx 31{,}2$ m/s.

Den første deloppgaven er nesten alltid slik, og gir 1–2 poeng.

Øv på: Ball i bevegelse med posisjonsvektor (a), Bil på spiralvei i parkeringshus (a), Propellfly med vektorfunksjon R2 E26 (a), Fotball hjørnespark og vektorer (a)

Karakter 4: i tillegg

- Når treffer den bakken? Løs $z(t) = 0$. For ballen over gir $7t - 4{,}9t^2 = 0$ at $t = \frac{10}{7} \approx 1{,}43$ s.
- Høyeste punkt: Løs $z'(t) = 0$. Der er $t = \frac{5}{7}$ s, høyden 2,5 m og farten $\sqrt{925} \approx 30{,}4$ m/s.
- Avstand langs bakken: $\sqrt{x^2 + y^2}$ i treffpunktet.
- Derivere trigonometriske koordinater, som $4\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$, med kjerneregelen.
- Sette opp riktig likning uten å løse den: «Når er banefarten 14,3 m/s?» betyr $|\vec{r}\,'(t)| = 14{,}3$, ikke $|\vec{r}(t)| = 14{,}3$. I E26 kom dette som flervalg der du skal velge riktig likning.
- Treffer to ting hverandre? Finn når den ene er i krysningspunktet, og når den andre kommer dit (strekning delt på fart). De treffer bare hvis tidspunktene er like.

Øv på: Fotball hjørnespark og vektorer, Miniubåt, fart og kollisjon med fiskestim, Banefart til 3D-printer, Propellfly med vektorfunksjon R2 E26

Sinusfunksjoner og sinusmodeller

Slik ser det ut

Del 1 og Del 2 · med på 6 av 7 · 2–6 poeng

«Den største mengden luftforurensning i løpet av døgnet er 31,2 µg/m³, og den minste mengden er 18,2 µg/m³. Bestem A, c og d i $M(t) = A\sin(ct + k) + d$» (H23).

Alle oppgavene om sinusfunksjoner og sinusmodeller (10)

Karakter 2

- Finne likevektslinjen og amplituden fra største og minste verdi: $d = \frac{31{,}2+18{,}2}{2} = 24{,}7$ og $A = \frac{31{,}2-18{,}2}{2} = 6{,}5$.
- Finne c fra perioden: $c = \frac{2\pi}{p}$. Én periode per døgn gir $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.
- Lese av amplitude, likevektslinje og periode for $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$: $A = 2$, $y = -1$ og $p = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$.
- Plotte punktene fra en tabell i et koordinatsystem for hånd og tegne en jevn graf gjennom dem. «Tegn» betyr noenlunde nøyaktig med tall på aksene. «Skisser» betyr at de viktigste egenskapene, som topp- og bunnpunkter, likevektslinje og periode, kommer tydelig fram.

Øv på: Sinusfunksjon og egenskaper (b), Luftforurensning og sinusfunksjon (a), Datatrafikk og sinusmodell R2 E26 (a)

Karakter 4: i tillegg

- Faseforskyvning: f over er forskjøvet $\frac{\pi/3}{\pi/6} = 2$ mot høyre.
- Finne et funksjonsuttrykk ut fra en graf, også på cosinusform: Les av største og minste verdi for A og d, perioden for c, og et punkt for faseforskyvningen φ. Begrunn hvert valg (vasen i E26).
- Begrunne at en gitt modell passer med dataene: I $D(t) = 63\,000 + 37\,000\sin(0{,}24t - 3{,}0)$ ligger likevektslinjen nær midten av største og minste verdi i tabellen, $\frac{102\,007+22\,550}{2} \approx 62\,300$, amplituden passer omtrent med halve forskjellen, og perioden $\frac{2\pi}{0{,}24} \approx 26$ timer er omtrent ett døgn (E26).
- Tolke tallene i en modell med ord og enheter.
- Bruke den deriverte: Veksten er størst der grafen krysser likevektslinjen på vei opp. Løs $f'(x) = c$ for et tall c slik du løser trigonometriske likninger.
- Løse $f(x) > a$: Finn når $f(x) = a$, og bruk grafen til å se hvor den ligger over. Svaret er sjelden eksakt, så bruk $\sin^{-1}$ på kalkulatoren i radianmodus: $D(t) > 90\,000$ gir $\sin u > \frac{27}{37}$ med $u = 0{,}24t - 3{,}0$, så $u = \sin^{-1}\left(\frac{27}{37}\right) \approx 0{,}818$ eller $u = \pi - 0{,}818 \approx 2{,}32$. Det gir t mellom omtrent 15,9 og 22,2.
- Integrere modellen for å finne en total mengde, som $\int_8^{16} D(t)\,dt$. Da må du regne ut verdier som $\cos(0{,}84)$ på kalkulatoren i radianmodus.

Øv på: Funksjonsuttrykk fra trigonometrisk graf, Sensor for utelys og trigonometri, Datatrafikk og sinusmodell R2 E26, Vase som omdreiningslegeme R2 E26, Russebil med trigonometrisk fartsfunksjon, Sinusmodell for elektrisk spenning

Omdreiningslegemer

Slik ser det ut

Del 1 og Del 2 · med på 4 av 7 uten datamaskin · 2–4 poeng · to andre sett hadde bare oppgaver som krevde datamaskin, men vasen fra V26 er skrevet om til kalkulator i E26 · E26 har også et omdreiningslegeme med delvis integrasjon

Innsiden av en kopp har samme form som omdreiningslegemet du får når grafen til $f(x) = \sqrt{x+4}$, $D_f = [0, 10]$, dreies om førsteaksen. «Hvor mye kakao er det plass til i koppen dersom den fylles helt opp?» (H25).

Alle oppgavene om omdreiningslegemer (4)

Karakter 2

- Kunne formelen for volum når grafen dreies om x-aksen: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.
- Regne ut integralet: $V = \pi \int_0^{10} (x+4) \, dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_0^{10} = 90\pi \approx 283 \text{ cm}^3$.

Øv på: Volum av omdreiningslegeme – kopp

Karakter 4: i tillegg

- Kvadrere et uttrykk før du integrerer: $\pi \int_1^3 (2x-1)^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{6}(2x-1)^3\right]_1^3 = \frac{62\pi}{3}$.
- Lage funksjonen selv ut fra mål på en tegning, for eksempel en parabel for siden i en tønne, og så regne ut volumet.
- Vurdere om svaret er rimelig, og gjøre om fra cm^3 til liter.
- Delvis integrasjon i volumformelen: Med $f(x) = 2\sqrt{x}\, e^{-x/3}$ blir $V = \pi \int_0^4 4x \, e^{-2x/3} \, dx$. Deriver x og integrer $e^{-2x/3}$: $\int x \, e^{-2x/3} \, dx = -\frac{3}{2}x \, e^{-2x/3} - \frac{9}{4}e^{-2x/3} + C$, og volumet blir $\pi\left(9 - 33e^{-8/3}\right) \approx 21{,}1 \text{ cm}^3$ (E26).

Øv på: Omdreiningslegeme av lineær funksjon, Volum av tønne ved integrasjon, Kontorstempel som omdreiningslegeme R2 E26, Vase som omdreiningslegeme R2 E26 (a)

Rekursjon og induksjon

Slik ser det ut

Del 2, i 2025 også Del 1 · med på 7 av 7 · 3–6 poeng

Figurtallene 1, 6, 16, 31 og 51 i et mønster av kuler. «Beskriv en rekursiv sammenheng mellom P_n og P_{n-1}» og «Bestem en eksplisitt formel for P_n, og vis at formelen stemmer ved å gjennomføre et induksjonsbevis» (H23).

Alle oppgavene om rekursjon og induksjon (7)

Karakter 2

- Regne ut de første leddene fra en rekursiv formel: $a_n = a_{n-1} + 10$ med $a_1 = 100$ gir 100, 110, 120, 130, og $b_n = b_{n-1} \cdot 1{,}05$ gir 100; 105; 110,25; 115,76.
- Finne differansene: I 1, 6, 16, 31, 51 øker leddene med 5, 10, 15, 20, så $P_n = P_{n-1} + 5(n-1)$.

Den første deloppgaven er ofte slik, og gir 2 poeng.

Øv på: Hildegunns ukepenger, Pentagontall rekursiv og induksjon (a), Rekursiv formel og programmering (a)

Karakter 4: i tillegg

- Føre et induksjonsbevis i tre trinn: Vis at formelen stemmer for $n = 1$ (eller $n = 0$). Anta at den stemmer for $n = k$. Vis at den da stemmer for $n = k + 1$.
- I induksjonstrinnet legger du til neste ledd på begge sider: $\frac{4^{k+1}-1}{3} + 4^{k+1} = \frac{4^{k+2}-1}{3}$ (H25).
- Skrive en konklusjon til slutt: Formelen gjelder for alle n.

Øv på: Induksjonsbevis for geometrisk rekke, Kubikktall og induksjonsbevis, Tallfølge med programmering og induksjon

Programmering for hånd

Slik ser det ut

Del 2 · «lag et program» med på 5 av 7, før på datamaskin · to oppgaver på papir i E26

Leddene i en rekke er gitt ved $a_n = (a_{n-1} - 1)^2$. «Lag et program som skriver ut de 6 første leddene i rekken dersom $a_1 = 3$. Hvilke verdier vil programmet skrive ut?» (E26). Eller ni kodelinjer du skal sette i riktig rekkefølge, så programmet skriver ut de 10 første leddene i en geometrisk rekke og summen av dem (E26). Du skriver koden på papir. Små syntaksfeil teller lite, men tankegangen må være riktig. UDIR skriver at programmering ikke skal vektes mer enn før, selv om eksempeloppgavene har mye av det.

Karakter 2

- Skrive en enkel løkke for hånd, slik du ville gjort i en editor:

```python
a = 3
for i in range(6):
    print(a)
    a = (a - 1)**2
```

- Sette kodelinjer i riktig rekkefølge: Startverdiene først, så løkka med innrykk på linjene som skal gjentas, og til slutt utskriften av summen uten innrykk.

Øv på: Kodelinjer for geometrisk rekke i riktig rekkefølge, Rekursiv rekke og konvergens E26 (a)

Karakter 4: i tillegg

- Regne ut for hånd hva programmet skriver ut: Programmet over gir 3, 4, 9, 64, 3969 og $3968^2 = 15\,745\,024$.
- Bruke en rekursiv sammenheng du har funnet i en tidligere deloppgave, i programmet.
- Lage en algoritme: Beskriv punktvis de viktigste stegene, hvilke konstanter og variabler du bruker, og hva som skal regnes ut.
- Finne og rette feil i kode, og endre kode så den løser en litt annen oppgave.

Øv på: Pentagontall rekursiv og induksjon (b), Kubikktall og induksjonsbevis (b), Rekursiv formel og programmering (b)

Dette kan du hoppe over

Disse har vært med, men kan ikke gjøres uten datamaskin, eller er så sjeldne eller vanskelige at tiden er bedre brukt på oppgavetypene over:

- Regresjon, som sinusregresjon fra en tabell (krever datamaskin, og UDIR skriver at regresjon ikke skal testes med kalkulator)
- Buelengde tilnærmet med polylinje og program (V23)
- Omdreining om y-aksen og volumet av en torus (H24)
- Smygplan og vektorfunksjoner der $\vec{r}\,' \perp \vec{r}\,''$ (H23)
- Beviset for at $\frac{\sin \nu}{\nu} \to 1$ (V23)
- Rekker der leddene er integraler, eller som skal gi $\ln 2$ (V24, V25)
- Annuitetslån med ukjent rente (V25)