R2 – dette må du mestre H26

16.10.26

Laget av KI: snakk med læreren din først

Denne oversikten er laget av KI ut fra tidligere eksamensoppgaver. Den kan ta feil, og den kjenner ikke deg. Læreren din vet best hva *du* bør øve på, så spør læreren først.

Står du helt på bar bakke, eller leser du til privatisteksamen, kan du bruke arket som et utgangspunkt for øvingen.

Gjelder eksamen høsten 2026

Denne guiden er for eksamen i R2 høsten 2026: kontinuasjonseksamen og privatisteksamen. På denne eksamenen gjelder fortsatt den gamle ordningen, med datamaskin på Del 2. Du kan bruke GeoGebra, CAS, regneark og Python, men ikke internett eller KI. Skal du opp våren 2027 eller senere, skal du bruke den vanlige guiden, R2 – dette må du mestre. Den er skrevet for den nye ordningen uten datamaskin.

Denne siden bygger på alle de sju eksamenene i R2 etter den nye læreplanen, fra våren 2023 til våren 2026. Vi har sortert oppgavene i oppgavetyper og telt hvor ofte hver type har vært med.

- **Karakter 2:** Forbered deg på alt i de grønne boksene. Det er de enkleste delene av oppgavetypene som er med på (nesten) *hver* eksamen. Du trenger ikke få til alt for å få 2, men jo mer av det du kan, jo tryggere er du.
- **Karakter 4:** Forbered deg i tillegg på de blå boksene. Heller ikke her må du kunne alt for å få 4, men har du forberedt deg på alt, kan du også få 5 eller 6.
- **Øv på:** Under hver oppgavetype står eksamensoppgaver å øve på. QR-koden legger alle eksamensoppgavene av typen inn i *Mine oppgaver* på matematikkoppgaver.no.

Oversikt

Oppgavetype	Del	Med på	Karakter 2	Karakter 4
Integralregning	1	7 av 7	✓	✓
Areal og tolkning av integraler	1 og 2	7 av 7	✓	✓
Aritmetiske og geometriske rekker	1 og 2	7 av 7	✓	✓
Eksakte verdier og trigonometriske likninger	1	6 av 7	✓	✓
Vektorer, plan og avstander	1 og 2	7 av 7	✓	✓
Kuleflater	1 og 2	4 av 7	✓	✓
Lese og forklare kode	1	5 av 7	✓	✓
Posisjon og fart i rommet	2	7 av 7	✓	✓
Sinusfunksjoner og sinusmodeller	1 og 2	6 av 7	✓	✓
Modell med regresjon	2	6 av 7	✓	✓
Omdreiningslegemer	1 og 2	6 av 7	✓	✓
Rekursjon og induksjon	1 og 2	7 av 7	✓	✓

Oppgavetype	Del	Med på	Karakter 2	Karakter 4
Lag et program	2	6 av 7	✓	✓

Slik er eksamen

Del	Tid	Hjelpemidler høsten 2026
Del 1	3 timer	Skrivesaker og linjal
Del 2	2 timer	Alle hjelpemidler, unntatt internett og verktøy for kommunikasjon. Du har datamaskin med GeoGebra, CAS, regneark og Python, men du får ikke bruke KI.

Fra V25 har Del 1 vart i 3 timer og gitt 30 av 49–50 poeng, med 8 oppgaver. Del 2 har hatt 4 oppgaver og 19–20 poeng. Før det (2023–2024) varte Del 1 i 2 timer. H26 har samme ordning som V25, H25 og V26. De lette deloppgavene ga bare 4–12 poeng per sett, så i R2 må du også få til en del middels deloppgaver.

Slik viser du digitale verktøy på Del 2

- **CAS:** Ta med utskriften, og skriv med ord hva du gjør, for eksempel «Jeg løser $|\vec{r}\,'(t)| = 10$». Skriv svaret i teksten også, ikke bare i utklippet.
- **Graf:** Ta med grafen, marker punktene du bruker (skjæring, toppunkt, nullpunkt), og skriv koordinatene.
- **Regresjon:** Skriv hvilken modell du valgte, hvorfor, og modellen med avrundede tall.
- **Program:** Legg ved koden og resultatet du får når du kjører den.
- Regn med trigonometriske funksjoner i radianer.

Hva kan komme på H26?

Dette er en prognose, ikke en fasit

Vi har bare tre høstsett i R2 etter den nye læreplanen (H23, H24 og H25). Det er for lite til å si sikkert hva som kommer. Øv på alle oppgavetypene.

- **Formatet blir trolig som i V26.** Høstsettet har alltid samme ordning som våren før. Regn med rundt 8 oppgaver og 30 poeng på Del 1, og 4 oppgaver og rundt 20 poeng på Del 2.
- **Høstsettet ligner ikke spesielt på våren samme år.** Like oppgaver går begge veier i tid: Pentagontallene i H23 kom igjen som kubikktall i V24. Kuleflaten med tangentplan i H25 kom igjen i V26. Miniubåten som kanskje kolliderer med en fiskestim (H25), ble til et fly og en fugl i V26.
- **Høstlinja:** R2 og S2 lages sammen om høsten og deler oppgaver. H24 og H25 hadde begge delvis integrasjon på oppgave 1, en rekkeoppgave med aritmetisk sum og uendelig geometrisk rekke, og sann/usann-påstander du skal begrunne. Vårsettene V24–V26 hadde variabelskifte i stedet, og ingen sann/usann-påstander.
- **Svært sannsynlig:** integral på oppgave 1, rekker, vektorer og plan, posisjon og fart i rommet på Del 2, en sinusmodell, et omdreiningslegeme, rekursjon eller induksjon, og et program.
- **Sannsynlig:** delvis integrasjon, en modell med regresjon fra en tabell (H23, H25 og V26) som du så bruker til likninger, derivasjon og integrasjon, kuleflate (H25 og V26) og induksjonsbevis.
- **Usikkert:** hva rekkeoppgaven på Del 2 handler om (sparing, lån, stoff i kroppen …).

Øv med hele eksamenssett

Det viktigste rådet: Gjør hele eksamenssett på tid, *uten* mer hjelp enn du har lov til på eksamen. Ingen løsningsforslag, ingen nettsøk og ingen KI før du er ferdig. Bruk de nyeste settene: R2 eksamen V2025, R2 eksamen H2025 og R2 eksamen V2026 har samme ordning som H26, med 3 timer på Del 1 og 2 timer på Del 2.

Når	Gjør dette
14 dager før eksamen	V25 på tid
7 dager før eksamen	H25 på tid
2 dager før eksamen	V26 på tid

Skriv ned hvor mange poeng du fikk til uten hjelp hver gang, og se etterpå på oppgavene du ikke klarte. Jobber du jevnt og trutt mellom settene, får du til mer og mer. Bruk oppgavetypene under til å øve på det du ikke fikk til.

Oppgavetyper som oftest er på Del 1

Inndelingen viser hvor oppgavetypene oftest har stått. Alle temaene kan komme på begge delene.

Integralregning

Slik ser det ut

Del 1 · med på 7 av 7, alltid som oppgave 1 · 2–6 poeng

«Bestem integralene» $\int_0^2 (e^{2x} + x)dx$ og $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$ (V26). Den første deloppgaven er ofte et bestemt integral av et polynom eller en eksponentialfunksjon. I H24 og H25 var det delvis integrasjon.

Alle oppgavene om integralregning (11)

Karakter 2

- Kunne de grunnleggende integralene: $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$, $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ og $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.
- Regne ut et bestemt integral med $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$: $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$.
- Variabelskifte når den deriverte av kjernen står som faktor: Med $u = \sin x$ blir $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$.
- Delvis integrasjon på x ganger $\cos x$ eller e^x: $\int 4x \cos x\,dx = 4x \sin x + 4\cos x + C$.

Øv på: To bestemte integraler, Ubestemt integral med substitusjon, Ubestemt integral med delvis integrasjon, Bestemt og ubestemt integral (a)

Karakter 4: i tillegg

- Se selv hvilken metode du skal bruke: $\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx$ har telleren lik den deriverte av nevneren, så svaret er $\ln|x^2-x-6|+C$.
- Delvis integrasjon med $\ln x$: I $\int x^2 \ln x\,dx$ deriverer du $\ln x$ og integrerer x^2. Svaret er $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$.
- Variabelskifte med trigonometri eller ln inni: $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = -\cos(\ln x) + C$.
- Kontrollere svaret ved å derivere det.

På Del 2 kan du regne ut integraler i CAS med `Integral`. På Del 1 må du kunne det for hånd.

Øv på: Integraler S2 v25, Integral med delvis integrasjon og trigonometri, Tangens, derivert og integral

Areal og tolkning av integraler

Slik ser det ut

Del 1, av og til Del 2 · med på 7 av 7 · 2–6 poeng

Du skal finne $f(x)$ når $f'(x) = \frac{2}{x^2}$ og grafen går gjennom $(2, 2)$, og så arealet av området som er avgrenset av $g(x) = x$ og $h(x) = -\frac{3}{x} + 4$ (V26). På Del 2 skal du ofte tolke et integral av en modell, som en total mengde eller en gjennomsnittsverdi.

Alle oppgavene om areal og tolkning av integraler (11)

Karakter 2

- Vite at et integral er areal *med fortegn*: $\int_{-1}^{1}(x^3+2x)\,dx = 0$ betyr at arealet over x-aksen er like stort som arealet under (H23).
- Finne $f(x)$ fra $f'(x)$ og ett punkt: Integrer, og bruk punktet til å finne C.
- Vite at arealet under en fartsgraf er strekningen.

Øv på: Bestemt integral 3, Bestemt integral og areal (a), Antiderivasjon og areal mellom grafer (a), Sanne og usanne påstander om fart og vinkel

Karakter 4: i tillegg

- Areal mellom x-aksen og en graf som krysser aksen: Del opp i nullpunktene og ta tallverdien av integralene under aksen.
- Areal mellom to grafer: Finn skjæringspunktene og regn ut $\int_a^b (\text{øverste} - \text{nederste})\,dx$. For g og h over er skjæringspunktene $x = 1$ og $x = 3$, og arealet er $\int_1^3 \left(-\frac{3}{x} + 4 - x\right) dx = 4 - 3\ln 3 \approx 0{,}70$.
- Velge riktig integraluttrykk for et markert område på en figur, og begrunne valget.
- Bruke integral i praksis: Strekning er $\int_a^b v(t)\,dt$, og gjennomsnittsverdien av f er $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. På Del 2 regner du ut integralet i CAS og forklarer hva tallet betyr. Haren i V25 løper $\int_0^7 v(t)\,dt \approx 103{,}4$ meter de første 7 sekundene.
- Tolke uttrykk med integral, sum og differanse av en modell F: $\int F(x)\,dx$ er samlet mengde, $\frac{1}{5}\int F(x)\,dx$ er gjennomsnittet over 5 år, og $\frac{F(5{,}001)-F(5)}{0{,}001}$ er omtrent den momentane vekstfarten (V23).

Øv på: Antiderivasjon og areal mellom grafer, Areal mellom cosinus og sinus, Tolkning av integral og areal fra graf, Bestem f ut fra den deriverte, Harens fart og gjennomsnittsfart, Regresjon på størrelsen av det norske musikkstrømmemarkedet (b og c)

Aritmetiske og geometriske rekker

Slik ser det ut

Del 1 på 6 av 7, og i Del 2 · med på 7 av 7 · 2–6 poeng

«En uendelig geometrisk rekke konvergerer mot 8. Bestem summen av de fire første leddene, når du får vite at $a_1 = 4$» (H23), eller «Finn summen av den aritmetiske rekken $3 + 7 + 11 + \ldots + 399$» (H24).

Alle rekkeoppgavene (12)

Karakter 2

- Kjenne igjen typen: Aritmetisk rekke har fast differanse d, geometrisk rekke har fast kvotient k.
- Aritmetisk sum: Finn antall ledd først. I $3 + 7 + \ldots + 399$ er $n = \frac{399-3}{4} + 1 = 100$, og $S_{100} = \frac{3+399}{2} \cdot 100 = 20\,100$.
- Uendelig geometrisk rekke: $S = \frac{a_1}{1-k}$ når $-1 < k < 1$. Med $a_1 = 4$ og $S = 8$ blir $k = \frac{1}{2}$.
- Geometrisk delsum: $S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$, så $S_4 = 4 \cdot \frac{(1/2)^4 - 1}{1/2 - 1} = \frac{15}{2}$.

Øv på: Uendelig geometrisk rekke, Sumformel, kvotient og geometrisk rekke (a og b), Aritmetisk og geometrisk rekke (a)

Karakter 4: i tillegg

- Konvergensområde når kvotienten har x i seg: $5 + 5\left(\frac{1}{2} - x\right) + \ldots$ konvergerer når $-1 < \frac{1}{2} - x < 1$, altså $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.
- Sette opp rekken selv fra en tekst: En ball faller fra 2 m og spretter opp 75 % hver gang. Den beveger seg $2 + 2 \cdot \frac{1{,}5}{1-0{,}75} = 14$ meter til sammen.
- Skrive et periodisk desimaltall som geometrisk rekke: $0{,}757\,575\ldots = 0{,}75 + 0{,}75 \cdot 0{,}01 + \ldots$
- Sparing, lån og stoff som hoper seg opp i kroppen: Første ledd, kvotient og antall ledd må stemme med teksten. Grenseverdien er summen av den uendelige rekken. På Del 2 setter du opp likningen og løser den i CAS, også når rentesatsen er ukjent (V25).
- Konvergens for rekker som ikke er geometriske: En rekke kan bare konvergere hvis leddene går mot 0. Med $a_n = (a_{n-1} - 1)^2$ og $a_1 = 1$ blir leddene $1, 0, 1, 0, \ldots$, så rekken divergerer (V26).

Øv på: Aritmetisk rekke, Aritmetisk og geometrisk rekke - treplatetårn, CCl4-konsentrasjon og geometrisk rekke, Noras sparing og lån, Vurder påstander om rekke, plan og areal, Rekursiv rekke og konvergens (b)

Eksakte verdier og trigonometriske likninger

Slik ser det ut

Del 1, i H23 på Del 2 · med på 6 av 7 · 2–6 poeng

«Bestem $\sin v$ og $\tan v$ når $\cos v = \frac{2}{3}$ og v er en vinkel i 4. kvadrant. Løs likningen $2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \sqrt{3}$ for $x \in \langle 0, 10\rangle$» (V26).

Alle oppgavene om eksakte verdier og trigonometriske likninger (9)

Karakter 2

- Kunne definisjonen av radianen: Vinkelen i radianer er buen delt på radien, $v = \frac{b}{r}$. Er buen 4 og radien 3, er vinkelen $v = \frac{4}{3}$ radianer.
- Gjøre om mellom grader og radianer: $80° = 80 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$.
- Kunne de eksakte verdiene for $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{3}$ utenat, og finne dem i enhetssirkelen.
- Bruke $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ og fortegnet i kvadranten: Er $\cos v = \frac{2}{3}$ i 4. kvadrant, er $\sin v = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ og $\tan v = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Øv på: Radianer og eksakte trigonometriske verdier, Vinkel i sirkel og trigonometri, Trigonometriske verdier og likning (a), Sanne og usanne påstander om fart og vinkel

Karakter 4: i tillegg

- Løse $\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ med begge løsningene: $u = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$. Med $u = \frac{\pi}{3}x$ blir $x = \pm\frac{1}{2} + 6k$, og i $\langle 0, 10\rangle$ er $L = \{\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}\}$.
- For sinus er de to løsningene v og $\pi - v$. Del på tallet foran x til slutt, og velg k så du får alle løsningene i intervallet.
- Dele på $\cos x$ når høyresiden er 0: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ gir $\tan x = \sqrt{3}$, altså $x = \frac{\pi}{3}$ eller $x = \frac{4\pi}{3}$.
- Slå sammen $a\sin kx + b\cos kx$ til $A\sin(kx + \varphi)$ med $A = \sqrt{a^2 + b^2}$: $3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.
- Bruke identitetene $\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v$ og $\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ til å vise at en likhet er en identitet: $4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x$.
- Motbevise en påstått identitet med ett moteksempel: $\sin 3v = 3\sin v - 3\sin^3 v$ stemmer ikke for $v = \frac{\pi}{2}$, for venstresiden er -1 og høyresiden 0.

Øv på: Trigonometriske likninger og antall løsninger, Trigonometrisk funksjon og likning, Sinusfunksjon og cosinusfunksjon

Vektorer, plan og avstander

Slik ser det ut

Del 1 på alle, av og til Del 2 · med på 7 av 7 · 2–8 poeng

Tre punkter, som $A(0, 0, 0)$, $B(3, 1, 2)$ og $C(-1, 3, 1)$ i et telt. «Bestem arealet av bunnen i teltet» (H24). Eller et plan, et punkt og spørsmål om avstand og normallinje (H23).

Alle oppgavene om vektorer, plan og avstander (12)

Karakter 2

- Finne vektoren mellom to punkter: $\overrightarrow{AB} = [3, 1, 2]$.
- Regne ut kryssproduktet: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1 \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1, 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)] = [-5, -5, 10]$.
- Arealet av trekanten er $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.
- Sjekke om et punkt ligger i et plan ved å sette koordinatene inn i planlikningen.

Øv på: Telt med vektorer i rommet (a), Plan og tangerende kuleflate (a)

Karakter 4: i tillegg

- Planlikning fra et punkt og en normalvektor: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. Normalvektoren til et plan gjennom tre punkter er kryssproduktet.
- Parameterframstilling for en linje gjennom et punkt, normalt på et plan: Bruk normalvektoren som retningsvektor.
- Avstand fra punkt til plan: $\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Fra $A(4,2,2)$ til $x-2y+2z+1=0$ blir det $\frac{|4-4+4+1|}{3}=\frac{5}{3}$.
- Volum av pyramide med trekantgrunnflate: $\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$. Vinkler med skalarproduktet.

Kommer vektoroppgaven på Del 2, kan du regne ut kryssprodukt og skalarprodukt i CAS (`Vektorprodukt` og `Skalarprodukt`), men skriv opp hva du regner ut.

Øv på: Plan, normalvektor og avstand til punkt, Pyramide med fire punkter i rommet, Trekant og plan i rommet, Bordplate som trekant i 3D, Areal av sideflaten i avkortet pyramide, Bevis at ortogonale vektorer oppfyller Pytagoras

Kuleflater

Slik ser det ut

Del 1 og Del 2 · med på 4 av 7 · ofte de siste deloppgavene i en vektoroppgave

Du skal finne sentrum og radius til kuleflaten $x^2+y^2+z^2-4x+2z=4$, og avgjøre om planet $3x+y-2z+1=0$ skjærer en kuleflate med sentrum $(1,-1,3)$ og radius 2 (H25). I V24 er AB en diameter i en kuleflate, og du skal finne den minste avstanden fra kuleflaten til et plan.

Alle oppgavene om kuleflater (4)

Karakter 2

- Skrive likningen når du kjenner sentrum og radius: Sentrum $(1,-1,3)$ og radius 2 gir $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.
- Lese av sentrum og radius når likningen står på formen $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.
- Når AB er en diameter, er sentrum midtpunktet på AB og radien $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$. Med $A(1,2,1)$ og $B(3,0,-3)$ er sentrum $(2,1,-1)$ og radien $\frac{1}{2}\sqrt{24}=\sqrt{6}$ (V24).

Øv på: Kuleflate og tangentplan (a), Plan og tangerende kuleflate (c)

Karakter 4: i tillegg

- Fullføre kvadratene: $x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 2z = 4$ blir $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$, så sentrum er $(2, 0, -1)$ og radius 3.
- Tangentplan: Normalvektoren er vektoren fra sentrum til tangeringspunktet.
- Skjærer planet kula? Sammenlign avstanden fra sentrum til planet med radien: $\frac{|3-1-6+1|}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0{,}80 < 2$, så planet skjærer.
- Minste avstand fra kuleflaten til et plan er avstanden fra sentrum til planet minus radien: Fra $(2, 1, -1)$ til $x + 2y + 2z = 14$ er det $\frac{|2+2-2-14|}{3} = 4$, så den minste avstanden er $4 - \sqrt{6} \approx 1{,}55$ (V24).
- To kuleflater: Sammenlign avstanden mellom sentrene med radiene. De skjærer ikke når avstanden er større enn summen av radiene, eller når den ene kula ligger helt inni den andre.

Øv på: Kuleflate og tangentplan, Kuleflate og plan, Plan og tangerende kuleflate, Parallelle plan og kule

Lese og forklare kode

Slik ser det ut

Del 1, én gang Del 2 · med på 5 av 7 · 2–6 poeng · alle settene har programmering, men i to av dem bare som å skrive egen kode på Del 2

Et kort Python-program med en løkke. «Forklar hva eleven ønsker å regne ut. Hva blir resultatet når programmet kjøres, dersom N settes til 100 i linje 4?» (V23). På Del 1 har du ikke datamaskin, så du må *lese* koden og regne ut svaret for hånd.

Alle oppgavene om å lese og forklare kode (6)

Karakter 2

- Gå gjennom løkka for hånd to–tre ganger og skriv ned verdiene. Si hva hver variabel står for.
- Kjenne igjen en aritmetisk rekke i koden: `a = a + d` med `S = S + a`. Med $a_1 = 3$, $d = 4$ og 100 ledd blir summen $\frac{3+399}{2} \cdot 100 = 20\,100$.

Øv på: Sum av aritmetisk rekke med kode, Ukjent program h23 (a)

Karakter 4: i tillegg

- Kjenne igjen en `while`-løkke som går til summen passerer en grense, og finne svaret med sumformelen.
- Kjenne igjen en rektangelsum: `S = S + f(x)*dx` regner ut $\int f(x)\,dx$ omtrent. Regn ut integralet eksakt. Med `abs(f(x))` er det arealet.
- Forklare hvorfor venstre og høyre endepunkt gir for lite og for mye når funksjonen vokser.

Øv på: Ukjent program S2 v24, Caspers kode, Ukjent program h23, Programmering og numerisk integrasjon

Oppgavetyper som oftest er på Del 2 (med datamaskin)

Posisjon og fart i rommet

Slik ser det ut

Del 2 · med på 7 av 7, ofte som oppgave 1 · 6 poeng (8 i H23)

Posisjonen til en fotball etter t sekunder er $\vec{r}(t) = [30t,\ 5t,\ 7t - 4{,}9t^2]$. «Hvor stor er farten til ballen idet den blir skutt?» og «Hvor langt fra hjørnemerket er ballen når den treffer fotballbanen igjen?» (V24).

Alle oppgavene om posisjon og fart i rommet (7)

Karakter 2

- Definere $\vec{r}(t)$ i CAS og sette inn en verdi for t: Med $\vec{r}(t) = [2t,\ 4t,\ 6 - 0{,}7t - 4{,}9t^2]$ er taket $z(0) = 6$ m over bakken, og $\vec{r}(0{,}5) = [1,\ 2,\ 4{,}425]$ (H24).
- Derivere for å få fartsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$.
- Farten (banefarten) er lengden av fartsvektoren: $\vec{v}(0) = [30,\ 5,\ 7]$ gir $|\vec{v}(0)| = \sqrt{974} \approx 31{,}2$ m/s.

Den første deloppgaven er nesten alltid slik, og gir 1–2 poeng.

Øv på: Ball i bevegelse med posisjonsvektor (a), Bil på spiralvei i parkeringshus (a), Propellfly med vektorfunksjon (a), Fotball hjørnespark og vektorer (a)

Karakter 4: i tillegg

- Når treffer den bakken? Løs $z(t) = 0$. For ballen over gir $7t - 4{,}9t^2 = 0$ at $t = \frac{10}{7} \approx 1{,}43$ s.
- Høyeste eller dypeste punkt: Løs $z'(t) = 0$. Der er $t = \frac{5}{7}$ s, høyden 2,5 m og farten $\sqrt{925} \approx 30{,}4$ m/s.
- Avstand langs bakken: $\sqrt{x^2 + y^2}$ i treffpunktet.
- Løse likninger med banefarten i CAS: «Når er farten 10 m/s?» betyr $|\vec{r}\,'(t)| = 10$, ikke $|\vec{r}(t)| = 10$. Skriv opp likningen, og løs den med `Løs` eller `NLøs`.
- Derivere trigonometriske koordinater, som $4\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$, med kjerneregelen.
- Treffer to ting hverandre? Finn når den ene er i krysningspunktet, og når den andre kommer dit (strekning delt på fart). De treffer bare hvis tidspunktene er like. Eller la CAS regne ut avstanden mellom dem som funksjon av t, og finn den minste avstanden.

Øv på: Fotball hjørnespark og vektorer, Miniubåt, fart og kollisjon med fiskestim, Banefart til 3D-printer, Propellfly med vektorfunksjon

Sinusfunksjoner og sinusmodeller

Slik ser det ut

Del 1 og Del 2 · med på 6 av 7 · 2–6 poeng

«Den største mengden luftforurensning i løpet av døgnet er 31,2 µg/m³, og den minste mengden er 18,2 µg/m³. Bestem A, c og d i $M(t) = A\sin(ct + k) + d$» (H23). På Del 2 får du ofte en modell for datatrafikk, vannstand eller spenning, og skal svare på når den er over en grense, når den vokser raskest, og hvor mye det blir til sammen (V26).

Alle oppgavene om sinusfunksjoner og sinusmodeller (10)

Karakter 2

- Finne likevektslinjen og amplituden fra største og minste verdi: $d = \frac{31{,}2+18{,}2}{2} = 24{,}7$ og $A = \frac{31{,}2-18{,}2}{2} = 6{,}5$.
- Finne c fra perioden: $c = \frac{2\pi}{p}$. Én periode per døgn gir $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.
- Lese av amplitude, likevektslinje og periode for $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$: $A = 2$, $y = -1$ og $p = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$.
- På Del 2: Tegne grafen til modellen i GeoGebra med riktig definisjonsmengde, og løse $f(t) = a$ grafisk med `Skjæring` eller i CAS med `NLøs`.

Øv på: Sinusfunksjon og egenskaper (b), Luftforurensning og sinusfunksjon (a), Datatrafikk og sinusmodell (b)

Karakter 4: i tillegg

- Faseforskyvning: f over er forskjøvet $\frac{\pi/3}{\pi/6} = 2$ mot høyre.
- Finne et funksjonsuttrykk ut fra en graf, også på cosinusform: Les av største og minste verdi for A og d, perioden for c, og et punkt for faseforskyvningen φ. Begrunn hvert valg (V26).
- Forklare hvordan tallene i en gitt modell passer med opplysningene, med ord og enheter (V24).
- Løse $f(x) > a$: Løs $f(x) = a$ i CAS, og bruk grafen til å se hvor den ligger over. Med $D(t) = 63\,000 + 37\,000\sin(0{,}24t - 3{,}0)$ er $D(t) > 90\,000$ for t mellom omtrent 15,9 og 22,2, altså fra ca. kl. 15.54 til ca. kl. 22.11 (V26).
- Når vokser modellen raskest? Finn toppunktet til $D'(t)$ med `Ekstremalpunkt`, eller løs $D''(t) = 0$. Her er $D'(t) = 8\,880\cos(0{,}24t - 3{,}0)$ størst for $t = 12{,}5$, kl. 12.30, og da øker trafikken med 8 880 gigabit per time per time.
- Integrere modellen i CAS for å finne en total mengde: $\frac{\int_8^{16} D(t)\,dt}{\int_0^{24} D(t)\,dt} \approx 0{,}315$, så omtrent 31,5 % av datamengden ble overført mellom kl. 8 og 16.

Øv på: Funksjonsuttrykk fra trigonometrisk graf, Sensor for utelys og trigonometri, Datatrafikk og sinusmodell, Tidevann og trigonometrisk modell, Russebil med trigonometrisk fartsfunksjon, Sinusmodell for elektrisk spenning

Modell med regresjon

Slik ser det ut

Del 2 · med på 6 av 7, ofte som første deloppgave · fra tabell i V23, H23, H25 og V26, fra bilde i V24 og H24

«Lag en modell f som du kan bruke til å bestemme vannstanden ved verftet i den aktuelle perioden», ut fra en tabell med vannstanden annenhver time (H23). I V24 og H24 skulle du selv lage en funksjon ut fra et bilde av en pære og et jordbær, og så regne ut volumet.

Alle oppgavene om modell med regresjon (6)

Karakter 2

- Legge tabellen inn i regnearket i GeoGebra og bruke regresjonsanalyse, eller `RegSin`, `RegLogist` og `RegPoly` på en liste med punkter. Velg x-verdier slik oppgaven sier, for eksempel $x = 0$ i 2008 (V23) eller t timer etter midnatt.
- Velge sinusmodell når dataene varierer periodisk: For datatrafikken i V26 gir sinusregresjon $S(t) \approx 63\,200 + 37\,200 \sin(0{,}243t - 2{,}96)$.
- Skrive modellen med avrundede tall, og ta med et bilde av grafen sammen med punktene.

Øv på: Datatrafikk og sinusmodell (a), Tidevann og trigonometrisk modell (a), Sinusmodell for elektrisk spenning (a)

Karakter 4: i tillegg

- Begrunne valget av modell: Musikkstrømmingen i V23 flater ut, så en logistisk modell passer, $F(x) \approx \frac{660}{1+30{,}7e^{-0{,}707x}}$. Tenk på om modellen gir mening også utenfor tabellen.
- Kjenne igjen tallene i modellen: Perioden $\frac{2\pi}{0{,}243} \approx 26$ timer er omtrent ett døgn. I H25 er $314{,}81 \approx 100\pi$, så spenningen blir $U(t) \approx 323\sin(100\pi t)$.
- Lage modell fra et bilde: Sett ut punkter langs kanten, bruk polynomregresjon, og regn ut $\pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$ i CAS. Pæra i V24 blir omtrent 310 cm³.
- Bruke modellen videre til likninger, derivert og integral, som under sinusmodeller.

Øv på: Regresjon på størrelsen av det norske musikkstrømmemarkedet, Volum av pære med omdreiningslegeme, Jordbær som omdreiningslegeme, Sinusmodell for elektrisk spenning

Omdreiningslegemer

Slik ser det ut

Del 1 og Del 2 · med på 6 av 7 · 2–4 poeng

Innsiden av en kopp har samme form som omdreiningslegemet du får når grafen til $f(x) = \sqrt{x+4}$, $D_f = [0, 10]$, dreies om førsteaksen. «Hvor mye kakao er det plass til i koppen dersom den fylles helt opp?» (H25). På Del 2 lager du ofte funksjonen selv, ut fra mål på en tønne (H23), et bilde (V24 og H24) eller en vase (V26).

Alle oppgavene om omdreiningslegemer (8)

Karakter 2

- Kunne formelen for volum når grafen dreies om x-aksen: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.
- Regne ut integralet: $V = \pi \int_0^{10} (x+4) \, dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_0^{10} = 90\pi \approx 283 \text{ cm}^3$.
- På Del 2: Regne ut volumet i CAS med `pi * Integral(f(x)^2, a, b)`.

Øv på: Volum av omdreiningslegeme – kopp, Omdreiningslegeme av lineær funksjon

Karakter 4: i tillegg

- Kvadrere et uttrykk før du integrerer: $\pi \int_1^3 (2x-1)^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{6}(2x-1)^3\right]_1^3 = \frac{62\pi}{3}$.
- Lage funksjonen selv ut fra mål på en tegning, for eksempel en parabel for siden i en tønne, eller ut fra punkter på et bilde, og så regne ut volumet.
- Lage en sinusfunksjon som gir en vase med riktig høyde og volum, og begrunne hver parameter (V26).
- Bruke CAS på integraler du ikke kan regne ut for hånd: Med $f(x) = \frac{2-\cos x}{\sin x}$ på $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ blir volumet $\frac{20\pi - \pi^2}{2} \approx 26{,}5$ (V23).
- Vurdere om svaret er rimelig, og gjøre om fra cm^3 til liter.

Øv på: Volum av tønne ved integrasjon, Omdreiingslegeme til trigonometrisk funksjon, Volum av pære med omdreiningslegeme, Jordbær som omdreiningslegeme, Vase som omdreiningslegeme

Rekursjon og induksjon

Slik ser det ut

Del 2, i 2025 også Del 1 · med på 7 av 7 · 3–6 poeng

Figurtallene 1, 6, 16, 31 og 51 i et mønster av kuler. «Beskriv en rekursiv sammenheng mellom P_n og P_{n-1}» og «Bestem en eksplisitt formel for P_n, og vis at formelen stemmer ved å gjennomføre et induksjonsbevis» (H23).

Alle oppgavene om rekursjon og induksjon (7)

Karakter 2

- Regne ut de første leddene fra en rekursiv formel: $a_n = a_{n-1} + 10$ med $a_1 = 100$ gir 100, 110, 120, 130, og $b_n = b_{n-1} \cdot 1{,}05$ gir 100; 105; 110,25; 115,76.
- Finne differansene: I 1, 6, 16, 31, 51 øker leddene med 5, 10, 15, 20, så $P_n = P_{n-1} + 5(n-1)$.

Den første deloppgaven er ofte slik, og gir 2 poeng.

Øv på: Hildegunns ukepenger, Pentagontall rekursiv og induksjon (a), Rekursiv formel og programmering (a)

Karakter 4: i tillegg

- Føre et induksjonsbevis i tre trinn: Vis at formelen stemmer for $n = 1$ (eller $n = 0$). Anta at den stemmer for $n = k$. Vis at den da stemmer for $n = k + 1$.
- I induksjonstrinnet legger du til neste ledd på begge sider: $\frac{4^{k+1}-1}{3} + 4^{k+1} = \frac{4^{k+2}-1}{3}$ (H25).
- Skrive en konklusjon til slutt: Formelen gjelder for alle n.
- På Del 2: Finne når det ene tilbudet blir best, med et regneark, et program eller CAS (V23).

Øv på: Induksjonsbevis for geometrisk rekke, Kubikktall og induksjonsbevis, Tallfølge med programmering og induksjon, Hildegunns ukepenger (b og c)

Lag et program

Slik ser det ut

Del 2 · med på 6 av 7 · 2–4 poeng

«Lag et program som regner ut S_{50} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a» (V24), eller «lag et program som regner ut summen av de 30 første leddene i tallfølgen. Husk å legge ved bilde av både koden og resultatet av kjøringen» (H24). Du skriver og kjører programmet på datamaskinen.

Alle oppgavene om å lage et program (6)

Karakter 2

- Skrive en enkel løkke som bruker den rekursive sammenhengen. Med $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$:

```python
S = 0
for n in range(1, 51):
    S = S + n**3
print(S)
```

- Kjøre programmet og skrive svaret i besvarelsen: $S_{50} = 1\,625\,625$. Legg ved både koden og resultatet.

Øv på: Kubikktall og induksjonsbevis (b), Pentagontall rekursiv og induksjon (b), Rekursiv formel og programmering (b), Rekursiv rekke og konvergens (a)

Karakter 4: i tillegg

- Bruke en rekursiv sammenheng du har funnet i en tidligere deloppgave, i programmet.
- Programmere en numerisk metode: en bedre tilnærming til et areal enn venstre og høyre endepunkt, for eksempel med midtpunktet i hvert delintervall (H25), eller lengden av en graf med en polylinje (V23).
- Kontrollere svaret: Lengden av grafen til $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ er en halvsirkel med radius 1, så programmet skal gi omtrent $\pi \approx 3{,}14$.
- Finne og rette feil i kode, og endre kode så den løser en litt annen oppgave.

Øv på: Programmering og numerisk integrasjon, Grafens lengde med polylinje, Rekursiv formel og programmering

Dette kan du hoppe over

Disse har vært med, men er så sjeldne eller vanskelige at tiden er bedre brukt på oppgavetypene over:

- Omdreining om y-aksen og volumet av en torus (H24)
- Smygplan og vektorfunksjoner der $\vec{r}\,' \perp \vec{r}\,''$ (H23)
- Beviset for at $\frac{\sin v}{v} \to 1$ (V23)
- Rekker der leddene er integraler, eller som skal gi $\ln 2$ (V24, V25)