R1 – dette må du mestre H26

16.10.26

Laget av KI: snakk med læreren din først

Denne oversikten er laget av KI ut fra tidligere eksamensoppgaver. Den kan ta feil, og den kjenner ikke deg. Læreren din vet best hva *du* bør øve på, så spør læreren først.

Står du helt på bar bakke, eller leser du til privatisteksamen, kan du bruke arket som et utgangspunkt for øvingen.

Gjelder eksamen høsten 2026

Denne guiden er for eksamen i R1 høsten 2026: kontinuasjonseksamen og privatisteksamen. På denne eksamenen gjelder fortsatt den gamle ordningen, med datamaskin på Del 2. Du kan altså bruke GeoGebra, CAS, regneark og Python. Skal du opp våren 2027 eller senere, skal du bruke den vanlige guiden («R1 – dette må du mestre»). Den er skrevet for den nye ordningen uten datamaskin.

Denne siden bygger på alle de ni eksamenene i R1 etter den nye læreplanen, fra våren 2022 til våren 2026. Vi har sortert oppgavene i oppgavetyper og telt hvor ofte hver type har vært med.

- **Karakter 2:** Forbered deg på alt i de grønne boksene. Det er de lette delene av oppgavetypene som er med på (nesten) *hver* eksamen. Du trenger ikke få til alt for å få 2, men jo mer av det du kan, jo tryggere er du.
- **Karakter 4:** Forbered deg i tillegg på de blå boksene, og fem oppgavetyper som bare står under karakter 4. Heller ikke her må du kunne alt for å få 4, men har du forberedt deg på alt, kan du også få 5 eller 6.
- **Øv på:** Under hver oppgavetype står eksamensoppgaver å øve på. QR-koden legger alle eksamensoppgavene av typen inn i *Mine oppgaver* på matematikkoppgaver.no.

Ny ordning fra våren 2027

Fra våren 2027 er det ikke lov med datamaskin på Del 2. Det gjelder ikke deg som tar eksamen høsten 2026.

Oversikt

Oppgavetype	Del	Med på	Karakter 2	Karakter 4
Derivasjon	1	9 av 9	✓	✓
Logaritmer og eksponentiallikninger	1 og 2	9 av 9	✓	✓
Grenseverdier	1	8 av 9	✓	✓
Vektorer	1 og 2	9 av 9	✓	✓
Programmering	1 og 2	8 av 9	✓	✓
Omvendte funksjoner	1 og 2	9 av 9	✓	✓
Eksponentielle og logistiske modeller	2	9 av 9	✓	✓

Oppgavetype	Del	Med på	Karakter 2	Karakter 4
Parameterframstilling og bevegelse	2	8 av 9	✓	✓
Kontinuitet og deriverbarhet	1 og 2	7 av 9		✓
Optimering	1 og 2	6 av 9		✓
Påstander: sant eller usant?	1 og 2	6 av 9		✓
Topp- og bunnpunkter	1 og 2	4 av 9		✓
Tangenter	1 og 2	4 av 9		✓

Slik er eksamen

Del	Tid	Hjelpemidler høsten 2026
Del 1	3 timer	Skrivesaker og linjal. Ingen kalkulator.
Del 2	2 timer	Alle hjelpemidler, unntatt internett og verktøy for kommunikasjon. Du kan bruke datamaskin med GeoGebra, CAS, regneark og Python, og egne notater og bøker. KI er ikke lov.

Høsten 2026 får du samme tid som våren 2026. Da var Del 1 størst: 9 oppgaver og 30 av 50 poeng. Del 2 hadde 5 oppgaver og 20 poeng. De fleste oppgavene i Del 1 gir 2–5 poeng. Mange deloppgaver i R1 er middels vanskelige, så for karakter 2 holder det ikke å kunne én type godt. Du må plukke de lette poengene på alle typene.

Når du bruker digitale verktøy på Del 2, må sensor kunne se hva du har gjort:

- CAS: Ta med utklipp av CAS-linjene, og skriv med ord hva du gjør. For eksempel: «Jeg løser $V(t) = 100$ i CAS og får $t \approx 64{,}8$.»
- Graf: Ta med grafen, og marker punktene du bruker (nullpunkt, ekstremalpunkt, skjæringspunkt). Skriv koordinatene i teksten.
- Regresjon: Skriv hvilken type modell du lager, og skriv modellen med tall.
- Python: Ta med koden og det programmet skriver ut.
- Skriv alltid svaret som en setning med enhet.

Hva kan komme på H26?

> ⚠ **Dette er en prognose, ikke en fasit**
>
> Ingen vet hva som kommer på eksamen. Prognosen bygger på bare fire høstsett i R1 (H22–H25). Øv på alle oppgavetypene, ikke bare de som står her.

Vi har sammenlignet høstsettene med våren samme år, våren året etter og høsten året før. Høstsettet ligner ikke mer på våren samme år enn på de andre settene. Det samme fant vi i 1P, S2 og 2P-Y. Det som følger våren, er formatet: Høsten 2026 blir trolig like Del 1-tung som våren 2026.

- **Svært sannsynlig** (med på alle eller nesten alle sett): derivasjon, logaritmer, grenseverdi, vektorer med en parameter (rett vinkel eller parallelle), omvendt funksjon, en eksponentiell eller logistisk modell på Del 2, parameterframstilling og et program å lese på Del 1 (begge på alle de fire høstsettene).
- **Svært sannsynlig fra «høstlinja»:** Alle de fire høstsettene hadde en modell du skal *lage med regresjon* på Del 2. Våren hadde det på tre av fem sett. H25 og V26 hadde nesten samme oppgave: Lag en logistisk modell, og finn når veksten er større enn et gitt tall.

- **Sannsynlig:** kontinuitet og deriverbarhet med delt forskrift (alle sett fra V24), topp- og bunnpunkter på Del 1 (de fire siste settene) og påstander som er sanne eller usanne (H22, H23, H24 og V26, men ikke H25).
- **Usikkert:** å lage et program på Del 2 (H22, V23 og H23, men ikke etter det), optimering (ikke på høsten etter H23) og tangenter (ikke på høsten etter H22).

Øv med hele eksamenssett

Det viktigste rådet: Gjør hele eksamenssett på tid, *uten* mer hjelp enn du har lov til på eksamen. Ingen løsningsforslag, ingen nettsøk og ingen KI før du er ferdig. På Del 2 skal du bruke datamaskinen, akkurat som på eksamen.

Når	Gjør dette
14 dager før eksamen	Ett helt eksamenssett på tid, for eksempel H24 eller V25
7 dager før eksamen	H25
2 dager før eksamen	V26

V26 har nøyaktig samme ordning som H26: 3 timer på Del 1 og 2 timer på Del 2 med datamaskin. H25 har de samme hjelpemidlene, men der var Del 1 på 2 timer og Del 2 på 3 timer. H25 er likevel viktig, fordi høstsettene ligner hverandre. Skriv ned hvor mange poeng du fikk til uten hjelp hver gang, og se etterpå på oppgavene du ikke klarte. Jobber du jevnt og trutt mellom settene, får du til mer og mer. Bruk oppgavetypene under til å øve på det du ikke fikk til.

Oppgavetyper uten hjelpemidler

Derivasjon

Slik ser det ut

Del 1 · med på 9 av 9, nesten alltid som oppgave 1 · 2 poeng

«Deriver funksjonen $h(x) = 3x^2 - 5 + \frac{3}{x-2}$» (V26) eller «Deriver funksjonen $f(x) = 4x^2 \cdot \ln(3x)$» (V24).

Alle derivasjonsoppgavene (9)

Karakter 2

- Potensregelen: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Det gjelder også $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ og $\frac{1}{x} = x^{-1}$.
- Kunne de to nye reglene utenat: $(e^x)' = e^x$ og $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Derivere ledd for ledd: $f(x) = e^x + \ln x$ gir $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$ (V23).
- Kjerneregelen når kjernen er enkel: $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$ (V25).

Øv på: Derivasjon av eksponential og logaritme, Derivasjon av eksponential og potensfunksjon, Derivasjon av to funksjoner R1 V22 (a), Derivasjon av polynom og brøk (de to første leddene gir 1 poeng)

Karakter 4: i tillegg

- Produktregelen: $(x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$ (H23).
- Brøkregelen: $g(x) = \frac{2x-3}{e^x}$ gir $g'(x) = \frac{2e^x-(2x-3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{5-2x}{e^x}$ (H25).
- Kjerneregelen inni et produkt: $(\ln(3x))' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$, så $\left(4x^2 \ln(3x)\right)' = 8x \ln(3x) + 4x$ (V24).
- Finne den deriverte fra definisjonen: $\lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2-4^2}{h} = \lim_{h\to 0}(8+h) = 8$ (H22).

Øv på: Deriver x ln(x), Derivasjon med produktregel og ln, Derivasjon av eksponentialfunksjon, Derivasjon og graffortolkning, Grenseverdi av differenskvotient i punkt 4

Logaritmer og eksponentiallikninger

Slik ser det ut

Del 1 på 8 av 9, i tillegg Del 2 med logaritmiske formler · med på 9 av 9 · 2–6 poeng

«Løs likningen $100^x - 3 \cdot 10^x = 4$» (H24), eller sorter $\log_2 8$, $e^{3\ln 1}$, $\lg 7$ og $\sqrt[4]{3^3}$ i stigende rekkefølge (V26). På Del 2 får du en formel som $L = 120 + 10 \cdot \lg I$ for lydstyrke (V23).

Alle oppgavene om logaritmer og eksponentiallikninger (12)

Karakter 2

- Regne ut enkle logaritmer uten kalkulator: $\lg 1000 = 3$, $\ln e^3 = 3$, $\log_2 8 = 3$ og $e^{\ln 5} = 5$.
- Løse de enkleste likningene: $10^x = b$ gir $x = \lg b$, $e^x = b$ gir $x = \ln b$, og $\lg x = c$ gir $x = 10^c$.
- Sette inn i en logaritmisk formel og løse: $130 = 120 + 10 \lg I$ gir $\lg I = 1$, altså $I = 10$ (V23). På Del 2 kan du også løse likningen i CAS, men skriv likningen du løser.
- Finne grunntallet: $\log_a \frac{1}{64} = -3$ betyr $a^{-3} = \frac{1}{64}$, altså $a^3 = 64$ og $a = 4$ (H25).

Øv på: Lydstyrke fra fly (a), Momentmagnitudeskala og energi (a), Luktintensitet og logaritmisk modell, Bestem grunntall i logaritmefunksjon

Karakter 4: i tillegg

- Logaritmesetningene: $\lg(ab) = \lg a + \lg b$, $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$ og $\lg a^x = x \lg a$. Da blir $\lg(ab) - \lg \frac{a}{b} + \lg(100b^3) = 2 + 5 \lg b$ (V26).
- Variabelskifte: I $(\ln x)^2 - \ln x = 6$ setter du $u = \ln x$ og får $u^2 - u - 6 = 0$, så $u = 3$ eller $u = -2$. Det gir $x = e^3$ eller $x = e^{-2}$ (V24).
- Forkaste løsninger: I $100^x - 3 \cdot 10^x = 4$ gir $u = 10^x$ likningen $u^2 - 3u - 4 = 0$ med $u = 4$ eller $u = -1$. Siden $10^x > 0$, er bare $x = \lg 4$ en løsning (H24).
- Sortere tall ved å regne ut det som går: $e^{3\ln 1} = e^0 = 1$, $\lg 7 < 1$, $\sqrt[4]{27}$ ligger mellom 2 og 3, og $\log_2 8 = 3$ (V26).
- «Hvor mange ganger så stor»: Øker M med 1 i $M = \frac{2}{3} \lg E - 3{,}2$, blir energien $10^{1{,}5} \approx 31{,}6$ ganger så stor (V24).

Øv på: Eksponentiallikning med substitusjon R1 V22, Logaritmeligningen med substitusjon, Eksponentiallikning med substitusjon, Logaritmeligninger, Eksponential- og logaritmelikninger, Sortere og forenkle logaritmeuttrykk, Sorter tallene i riktig rekkefølge

Grenseverdier

Slik ser det ut

Del 1 · med på 8 av 9 · 2–4 poeng

«Bestem grenseverdien $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+x-12}$» (V22) eller «Bestem grenseverdien dersom den eksisterer: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{3x^2+3}$» (V26).

Alle grenseverdioppgavene (8)

Karakter 2

- Sett inn tallet først. Får du et vanlig tall, er det svaret.
- Får du $\frac{0}{0}$: faktoriser og forkort. $\frac{x-3}{x^2+x-12}=\frac{x-3}{(x-3)(x+4)}=\frac{1}{x+4}$, så grenseverdien er $\frac{1}{7}$ (V22).
- Når $x\to\infty$: del teller og nevner på den høyeste potensen av x. I $\frac{2x+2}{3x^2+3}$ vokser nevneren raskest, så grenseverdien er 0 (V26).
- Vite at $e^{-x}\to 0$ når $x\to\infty$ (V24).

Øv på: Grenseverdi av rasjonalt uttrykk R1 V22, Grenseverdi av rasjonalt uttrykk, Grenseverdier av eksponentialfunksjon, Grenseverdi for rasjonalt uttrykk

Karakter 4: i tillegg

- Får du «tall delt på 0», finnes ikke grenseverdien. I $\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x-8}$ går telleren mot 14 og nevneren mot 0 når $x\to -2$ (H25).
- Bestemme en parameter så grenseverdien finnes: Telleren må også bli 0. $4-2a+2=0$ gir $a=3$, og etter forkorting blir grenseverdien $\frac{1}{6}$ (H25).
- Bruke konjugatsetningen: $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$, så $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}$ (V25).
- Bruke ensidige grenseverdier ($x\to a^-$ og $x\to a^+$) og forklare hva du finner.

Øv på: [Grenseverdier], Grenseverdier med algebraisk forenkling, Grenseverdi når x går mot 2, Grenseverdi av differenskvotient i punkt 4

Vektorer

Slik ser det ut

Del 1 på 9 av 9, av og til også Del 2 · 3–7 poeng

«Gitt punktene $A(1,-3)$, $B(4,1)$ og $C(-2,a)$. Bestem a slik at vinkel BAC blir 90°» (V26), eller «Avgjør om noen av vektorene er like lange eller ortogonale» (H24).

Alle vektoroppgavene (14)

Karakter 2

- Vektoren mellom to punkter: $\overrightarrow{AB} = [4-1,\ 1-(-3)] = [3,\ 4]$ (V26).
- Lengden: $|[3,\ 4]| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
- Ortogonale vektorer har skalarprodukt 0: $[3,\ -2]\cdot[8,\ 12] = 24-24 = 0$ (H24).
- Parallelle vektorer er et tall ganger hverandre: $[4,\ -6] = 2\cdot[2,\ -3]$.
- Lengden av et linjestykke: $|AB| = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$ når $A(-2,3)$ og $B(3,2)$ (H25).

Øv på: Koordinatvektorer, lengde og ortogonalitet, Vektorer til å bestemme sidekanter og vinkler i trekant, Koordinater, linje og ortogonalitet (a), Parallellogram og vektorer (a), Vektorer og basketball (a)

Karakter 4: i tillegg

- Bestemme en parameter for rett vinkel: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = [3,\ 4]\cdot[-3,\ a+3] = 4a+3 = 0$ gir $a = -\frac{3}{4}$ (V26).
- Bestemme en parameter så tre punkter ligger på linje: $\overrightarrow{AC} = t\cdot\overrightarrow{AB}$, og sammenligne koordinatene (V24, V22).
- Regne med $\vec{a}$ og $\vec{b}$ uten koordinater: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a}$ (V26).
- Finne lengder med skalarproduktet: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$. Med $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ og $\vec{a}\cdot\vec{b} = -3$ blir $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{4-6+9} = \sqrt{7}$ (V22).
- Vinkelen mellom to vektorer på Del 2: $\cos v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\,|\vec{w}|}$. Du kan regne ut tallene i CAS, men skriv formelen du bruker (V22).

Øv på: Vinkel og likebeint trekant med vektorer, Tre punkter på linje og rettvinklet trekant, Tre punkter vinkelrett og kollineær R1 V22, Parallelle vektorer i trekant OAB, Vektorer lengde og vinkel med prikkprodukt R1 V22, Vektorer, lengde og ortogonalitet, Avstand fra punkt til linje og graf

Programmering

Slik ser det ut

Del 1 på 7 av 9, Del 2 på 5 av 9 · med på 8 av 9 · 2–5 poeng

På Del 1 får du et kort Python-program med en funksjon og en `while`-løkke, for eksempel `while O(x + 1) > O(x):`. «Bruk en egnet strategi til å bestemme verdien som skrives ut» (H24). Da skal du *lese* koden og regne, ikke kjøre den. På Del 2 skal du ofte lage et program selv og kjøre det: «Lag et program som du kan bruke til å bestemme gjennomsnittet til funksjonen f gitt ved $f(x) = \sqrt{x}$ i intervallet $[0, 1]$» (V23).

Alle programmeringsoppgavene (11)

Karakter 2

- Finne funksjonen i koden og skrive den med vanlig matematikk: `-0.1*x**2 + 2000*x` er $-0{,}1x^2 + 2000x$.
- Gå gjennom løkka for hånd to–tre ganger og skrive ned verdiene.
- Kjenne igjen `(f(x + h) - f(x))/h` som den deriverte, regnet ut med en liten h.
- Si med ord hva programmet leter etter: `while f(x + 1) > f(x)` går oppover til grafen slutter å stige, altså til et toppunkt.
- På Del 2: Skriv av et program du får, kjør det, og skriv hva det skriver ut (V24).

Øv på: Finne verdi programmet skriver ut (strategien gir 1 av 2 poeng), Tolk og fiks program som finner bunnpunkt (a), Programmering maksimum av funksjon med while-løkke (a), Innskrevet rektangel og Lars sitt program (a)

Karakter 4: i tillegg

- Bytte ut programmet med regning: Toppunktet til $O(x) = -0{,}1x^2 + 2000x - 50\,000$ er der $O'(x) = -0{,}2x + 2000 = 0$, altså $x = 10\,000$. Det er tallet programmet skriver ut (H24).
- Forklare hvorfor svaret blir unøyaktig: Med `a = a + 1` hopper programmet forbi bunnpunktet i $x = 2{,}25$ og skriver ut $x = 3$ (H23).
- Kjenne igjen halveringsmetoden: `if f(a)*f(m) < 0` betyr at nullpunktet ligger mellom a og m (H25).
- Avgjøre topp-, bunn- eller terrassepunkt ut fra fortegnet til den deriverte rett før og rett etter (V26).
- Sette kodelinjer i riktig rekkefølge, finne feil og endre kode.
- Lage et program på Del 2: Beskriv algoritmen med ord først, og skriv så koden. Programmet kan for eksempel regne ut tyngdepunktet $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ (H22), eller sjekke om skalarproduktet er 0 i et av hjørnene, så du vet om trekanten er rettvinklet (V22).
- Bruke en løkke til å regne ut mange verdier: Gjennomsnittet av $\sqrt{x}$ i $N + 1$ jevnt fordelte punkter i $[0, 1]$ nærmer seg $\frac{2}{3}$ når N blir stor (V23). Kjør programmet og skriv svaret.

Øv på: Funksjonsdrøfting og halveringsmetode, Python-kode for stasjonære punkter, Tangentlinje funnet med derivasjonsprogram, Optimering av rektangelareal og program, Innskrevet rektangel og Lars sitt program, Program for tyngdepunkt i trekant, Algoritme og kode for rettvinklet trekant R1 V22, Gjennomsnitt med algoritme og program

Oppgavetyper med hjelpemidler

Omvendte funksjoner

Slik ser det ut

Del 2 på 8 av 9, Del 1 på H22 og V26 · med på 9 av 9 · 2–6 poeng

Tre grafer. «Avgjør og begrunn for hver av funksjonene om de har en omvendt funksjon» (H24). Eller: «En funksjon f gitt ved $f(x) = \ln(x+2)$ har en omvendt funksjon g. Bestem $g'(1)$» (V26).

Alle oppgavene om omvendte funksjoner (11)

Karakter 2

- En funksjon har omvendt funksjon når hver y-verdi hører til bare én x-verdi. Ingen vannrett linje skjærer grafen mer enn én gang.
- Finne et moteksempel: $f(x) = x^4$ har ikke omvendt funksjon, fordi $f(-1) = f(1) = 1$ (H22).
- Finne den omvendte funksjonen: Sett $y = e^{x-3}$ og løs for x. Det gir $x = \ln y + 3$, så $g^{-1}(x) = \ln x + 3$ (V26).
- Bytte om definisjonsmengde og verdimengde: $D_{f^{-1}} = V_f$.

Øv på: Omvendt funksjon av x⁴ og eksponentialfunksjon (a), Omvendt funksjon fra graf (a), Omvendt funksjon fra grafer

Karakter 4: i tillegg

- Vise at f har omvendt funksjon fordi $f'(x) > 0$ (eller $f'(x) < 0$) i hele definisjonsmengden. På Del 2 kan du finne f' i CAS, men du må forklare hvorfor fortegnet ikke skifter.
- Den deriverte til den omvendte funksjonen: $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Finn først x med $f(x) = 1$: $\ln(x+2) = 1$ gir $x = e - 2$. Da er $f'(x) = \frac{1}{e}$, og $g'(1) = e$ (V26).
- Største intervall der f har omvendt funksjon: Det går mellom de stasjonære punktene. For $f(x) = x^3 - 6x$ er $f'(x) = 3x^2 - 6 = 0$ når $x = \pm\sqrt{2}$, så intervallet er $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ (V22).
- Bruke den omvendte funksjonen i praksis: Når $Q(t) = Q_0(1 - e^{-2{,}3t})$ skal være 90 % av Q_0, blir $t = \frac{\ln 10}{2{,}3} \approx 1{,}0$ sekund (H22).

Øv på: Derivert av omvendt funksjon til ln, Største intervall for omvendt funksjon R1 V22, Omvendt funksjon og tangentlikninger, Påstander om asymptote og omvendt funksjon, Omvendt funksjon og ladetid for kamerablits, Grafer og dobbeltderivert (b)

Eksponentielle og logistiske modeller

Slik ser det ut

Del 2 · med på 9 av 9, nesten alltid som første oppgave på Del 2 · 4–8 poeng

Du får en tabell. «Lag en modell V på formen $V(t) = \frac{C}{1+a\cdot e^{-kt}}$ for farten $V(t)$ meter per sekund» (V26). Så følger spørsmål som «Hvor lang tid tar det før raketten oppnår en fart på 100 m/s?» og «Når er fartsøkningen størst?». Andre ganger får du modellen ferdig: $S(t) = \frac{300}{1+28\cdot e^{-0{,}3t}}$ (V24).

Alle modelloppgavene (11)

Karakter 2

- Lage modellen med regresjon i GeoGebra: Legg tabellen inn i regnearket, og velg logistisk eller eksponentiell regresjon. Skriv modellen med tall. I V26 får du omtrent $V(t) = \frac{223{,}5}{1+27{,}3\cdot e^{-0{,}0478t}}$.
- Regne ut verdier og tolke tallene: I $V(t) = 10\,000 \cdot e^{-0{,}07t} + 500$ er $V(0) = 10\,500$ liter (H24).
- Løse en likning: $V(t) = 100$ i CAS gir $t \approx 64{,}8$ sekunder (V26). Enkle likninger kan du også løse med ln: $2{,}5 - 2{,}5 \cdot 0{,}99^t = 2{,}0$ gir $t = \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}99} \approx 160$ sekunder (H23).
- Skrive svaret som en setning med enhet.

Øv på: Konsentrasjon i kjemisk reaksjon (a og b), Timelønn og lønnsvekst (a og b), Vannreservoar med eksponentiell funksjon (a), Logistisk modell for raketthastighet (a og b)

Karakter 4: i tillegg

- Når er veksten størst? Det er i vendepunktet. Løs $V''(t) = 0$ i CAS: $t \approx 69{,}2$ s, og $V'(69{,}2) \approx 2{,}67$ m/s^2 (V26). For en logistisk modell er det også der halve bæreevnen er nådd: $S = 150$ gir $t = \frac{\ln 28}{0{,}3} \approx 11{,}1$ dager (V24).
- Når er veksten større enn et tall? Løs $V'(t) = 2$ i CAS. Du får $t \approx 46{,}2$ og $t \approx 92{,}2$, så farten øker med mer enn 2 m/s^2 i omtrent 46 sekunder (V26). H25 hadde nesten samme oppgave: $F'(t) > 150$ mellom $t \approx 3{,}3$ og $t \approx 9{,}8$.
- Tolke $F'(12)$ og $F''(12)$ med enhet: $F'(12) \approx 115$ betyr at folketallet økte med omtrent 115 personer per år i 1972. $F''(12) < 0$ betyr at veksten avtar (H25).
- Finne asymptotene og tolke dem: $y = 300$ betyr at høyst 300 elever blir smittet (V24).
- Velge modell og argumentere: Sammenlign en eksponentiell og en logistisk modell med dataene. En eksponentiell modell vokser uten grense, en logistisk flater ut. Si noe om hvor lenge modellen gjelder (H24, V24, H25).
- Lage en logistisk modell fra opplysninger om bæreevne, startverdi og når veksten er størst (V25).
- Sette opp en delt forskrift som modell ut fra en tekst, og forklare hvorfor den må være kontinuerlig (strømstønad, V26).
- Kunne forskjellen på å *tegne* en graf (nummererte akser, noenlunde nøyaktig) og å *skissere* den (de viktigste egenskapene og punktene kommer tydelig fram).

Øv på: Logistisk modell for raketthastighet, Logistisk vekstmodell, Fiskepopulasjon og logistisk modell, Modell for drivstoffutvikling i Moss, Logistisk modell for Norges energiproduksjon, Influensaepidemi og logistisk vekst, Logistisk vekstmodell batteriteknologi, Newtons avkjølingslov for kaffe med ln-modell

Parameterframstilling og bevegelse

Slik ser det ut

Del 2 · med på 8 av 9, på alle høstsettene · 6–8 poeng

«Posisjonen til båten etter t timer er $\vec{r}_1(t) = [2 + 24t, 4 + 20t]$. Hvor stor er banefarten til båten?» Deretter: «Undersøk om politiet vil møte piraten» (V22).

Alle oppgavene om parameterframstilling og bevegelse (8)

Karakter 2

- Fartsvektoren er det du får når du deriverer, her $[24, 20]$. For en rett linje er det tallene foran t.
- Banefarten er lengden av fartsvektoren: $\sqrt{24^2 + 20^2} = \sqrt{976} \approx 31{,}2$ km/h (V22).
- Finne posisjonen ved å sette inn t: Skøyteløperen er etter 30 sekunder i $(6 \cdot 30 + 120, \frac{5}{3} \cdot 30 + 50) = (300, 100)$ (V26).
- Avstanden mellom to posisjoner er lengden av vektoren mellom dem: $|[12, -35]| = 37$ m (H24).

Øv på: Piratbåt og politibåt posisjonsvektorer (a), Skøyteløper og hund med parameterframstilling (a), Posisjonsvektorer for småfugler og rovfugl (a og b), Parameterframstilling og møtepunkt (a og b), To biler på kryss og motorvei (a), Fiskebåt og vektorbevegelse (a)

Karakter 4: i tillegg

- Møtes de? Sett posisjonene like med *samme* t, og løs i CAS eller for hånd. $2 + 24t = 26t$ gir $t = 1$, men da er y-koordinatene 24 og -12. Båtene møtes ikke (V22).
- Krysser banene? Bruk *ulike* parametre, t og s, og løs likningssystemet i CAS (H25).
- Minste avstand: Lag avstanden som en funksjon av t, og finn bunnpunktet med Ekstremalpunkt i GeoGebra eller med $d'(t) = 0$ i CAS. For småfuglene er avstanden minst når $t \approx 5{,}14$ s, og da er den omtrent 6,9 m (H24). V25 hadde samme type med en båt og et fyr.
- Når treffer den kanten? Likninger som $5(e^{-t} - t) = -15$ kan ikke løses for hånd. Løs dem i CAS (ishockeypucken, H23).
- Finne ny fart for å treffe et punkt: Gang retningsvektoren med en ukjent k og løs for k (V22, V25, V26).

Øv på: Fiskebåt og vektorbevegelse, Skøyteløper og hund med parameterfremstilling (c), Parameterframstilling og møtepunkt (d), Ishockeypuck med vektorfunksjon, Posisjonsvektorer for småfugler og rovfugl, Stråle gjennom origo og vinkler i trekant

Bare for karakter 4

Kontinuitet og deriverbarhet

Slik ser det ut

Del 1 og Del 2 · med på 7 av 9, alle sett fra V24 · 2–6 poeng

$f(x) = x^2 + 2$ når $x < 0$, og $f(x) = 2e^x$ når $x \geq 0$. «Avgjør om f er kontinuerlig i $x = 0$. Avgjør om f er deriverbar i $x = 0$» (V25).

Alle oppgavene om kontinuitet og deriverbarhet (9)

Karakter 4

- Kontinuitet: Regn ut grenseverdien fra venstre og fra høyre og $f(a)$. Er alle tre like, er f kontinuerlig. I V25 er alle tre lik 2.
- Deriverbarhet: f må være kontinuerlig, *og* den deriverte må være lik fra begge sider. I V25 går f' mot 0 fra venstre og mot 2 fra høyre, så f er ikke deriverbar i $x = 0$.
- Bestemme en parameter: Med $x^2 + 1$ for $x < 2$ og $x - t$ for $x \geq 2$ må $5 = 2 - t$, altså $t = -3$ (V22).
- Vite at $|x|$ er kontinuerlig, men ikke deriverbar i $x = 0$ (H24).
- Mange ukjente på Del 2: Skriv én likning for hvert krav (lik verdi og lik derivert i hvert skjøtepunkt), og løs likningssystemet i CAS (V25, H25).

Øv på: Kontinuitet og deriverbarhet stykkevis, Kontinuitet og deriverbarhet stykkvis funksjon R1 V22, Kontinuerlig funksjon med størst mulig definisjonsmengde, Stykkevis funksjon for strømstønad, Stykkevis funksjon og deriverbarhet, Stykkevis funksjon med ukjent uttrykk

Optimering

Slik ser det ut

Del 2, én gang Del 1 · med på 6 av 9 · 2–6 poeng

En kasse uten lokk med kvadratisk bunn kan lages av høyst 120 dm^2 plater. «Hva er det maksimale volumet kassen kan få?» (H23).

Alle optimeringsoppgavene (8)

Karakter 4

- Sette opp størrelsen som en funksjon av én variabel. Med bunn x og høyde h er $x^2 + 4xh = 120$, så $h = \frac{120-x^2}{4x}$ og $V(x) = \frac{120x-x^3}{4}$.
- Regne ut for en gitt verdi først: Med $x = 5$ blir $h = 4{,}75$ og $V = 118{,}75$ dm^3 (H23).
- Derivere og sette lik 0: $V'(x) = \frac{120-3x^2}{4} = 0$ gir $x = \sqrt{40} \approx 6{,}32$ dm og $V \approx 126{,}5$ dm^3.
- Bruke CAS når likningen er vanskelig: Arealet $A(a) = (5-a)(200-100 \cdot 0{,}8^a)$ har $A'(a) = 0$ når $a \approx 0{,}171$. Det gir $A \approx 501$ (V26). Står det «bruk derivasjon», må CAS-linjene vise den deriverte.
- Vise at det er et maksimum med fortegnslinje eller graf, og sjekke endepunktene. I V26 er $A(0) = 500$, så det største arealet er bare litt større enn i endepunktet.

Øv på: Maksimalt rektangel under eksponentialgraf, Innskrevet rektangel og Lars sitt program (b), Kasse uten lokk, Tangent til parabel og minste areal av trekant OAB, Optimering av rektangelareal og program, Pyramide i halvkule – størst mulig volum, Trekantareal med punkt på tredjegradsgraf optimering

Påstander: sant eller usant?

Slik ser det ut

Del 2, på V26 i Del 1 · med på 6 av 9 · 2–6 poeng

«Avgjør i hvert tilfelle om påstanden er sann eller usann. a) Hvis $x > 0$, så er $(\ln x)^4 = 4 \ln x$» (V23). Ofte er det én påstand om logaritmer, én om deriverbarhet og én om omvendte funksjoner.

Alle påstandsoppgavene (6)

Karakter 4

- Ett moteksempel er nok til å vise at en påstand er usann: Med $x = e$ er $(\ln e)^4 = 1$, men $4 \ln e = 4$ (V23).
- For å vise at en påstand er sann, må du begrunne den generelt, for eksempel med en regneregel: $e^{k \ln x} = (e^{\ln x})^k = x^k$ (V24).
- Kjenne de vanlige fellene: $\lg a^x = x \lg a$, men $(\lg a)^x$ er noe annet. En funksjon kan ha omvendt funksjon uten å være strengt voksende eller avtakende (V23, V24).
- På Del 2 kan du tegne grafene i GeoGebra for å finne et moteksempel. En graf som ser riktig ut, viser likevel ikke at en påstand er sann.
- Skrive konklusjonen tydelig: «Påstanden er usann, fordi …».

Øv på: Avgjør påstander om funksjoner, Påstander om logaritme, derivasjon og invers, Påstander om grenseverdi og deriverbarhet, Påstander om asymptote og omvendt funksjon, Sannhetsverdi av tre påstander om funksjoner og logaritmer

Topp- og bunnpunkter

Slik ser det ut

Del 1, av og til Del 2 · med på 4 av 9, men på alle de fire siste settene · 2–6 poeng

«En funksjon f er gitt ved $f(x) = e^x(6 - e^x)$. a) Bestem eventuelle nullpunkter. b) Vis at $f'(x) = 2e^x(3 - e^x)$. c) Bestem koordinatene til eventuelle topp- eller bunnpunkter» (V26).

Alle oppgavene om topp- og bunnpunkter (6)

Karakter 4

- Nullpunkter fra faktorer: Et produkt er 0 når en av faktorene er 0. e^x er aldri 0, så $6 - e^x = 0$ gir $x = \ln 6$ (V26).
- «Vis at»-oppgaver: Deriver med produktregelen og faktoriser til du får uttrykket som står i oppgaven.
- Fortegnslinje for f': $3 - e^x$ skifter fra pluss til minus i $x = \ln 3$, så $(\ln 3, 9)$ er et toppunkt (V26).
- Lese fortegnet til f': $g'(2) > 0$ og $g'(3) < 0$ betyr at grafen har et toppunkt mellom $x = 2$ og $x = 3$ (H25).
- Koble en graf til grafen til den deriverte eller den dobbeltderiverte: Der f har topp- eller bunnpunkt, er $f' = 0$. Der f krummer opp, er $f'' > 0$ (H25, Del 2).

Øv på: Topp- og bunnpunkt for eksponentialfunksjon, Nullpunkter og ekstremalpunkter med produkt, Derivasjon og graffortolkning, Funksjonsdrøfting og halveringsmetode, Identifiser funksjon fra vekstfart og derivert, Grafer og dobbeltderivert (a)

Tangenter

Slik ser det ut

Del 2, én gang Del 1 · med på 4 av 9 · 2–4 poeng

«Grafen til $f(x) = e^{2x}$ har én tangent som går gjennom origo. Bestem eksakte verdier for koordinatene til tangeringspunktet» (V26).

Alle tangentoppgavene (5)

Karakter 4

- Tangentlikningen i punktet $(a, f(a))$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
- Tangent gjennom et punkt utenfor grafen: Sett punktet inn i tangentlikningen og løs for a. Gjennom origo betyr det $f'(a) = \frac{f(a)}{a}$. For e^{2x} gir det $2e^{2a} = \frac{e^{2a}}{a}$, så $a = \frac{1}{2}$ og punktet er $\left(\frac{1}{2}, e\right)$ (V26).
- Det samme med $\ln x$: $\frac{1}{a} = \frac{\ln a}{a}$ gir $\ln a = 1$, så punktet er $(e, 1)$ (V25).
- På Del 2 kan du løse likningen for a i CAS. Står det «eksakte verdier», må du bruke Løs, ikke NLøs.

Øv på: Tangent fra origo til eksponentialfunksjon, Tangent til ln og trekantareal, Tangentpunkt og skjæringspunkt tredjegradsfunksjon og linje, Tangent til parabel og minste areal av trekant OAB

Dette kan du hoppe over

Disse har vært med, men er så sjeldne eller vanskelige at tiden er bedre brukt på oppgavetypene over:

- Cauchys middelverdisetning (H23)
- Generelle bevis om alle tredjegradsfunksjoner (V22 og H23)
- Symmetri i løsningene av $f'(x) = k$ for en rasjonal funksjon (H22)